КРИТЕРИИ ЗА ВЗЕМАНЕ НА БИЗНЕС РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯТА НА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ И РИСК

Проф. д-р Дочо Дочев – Икономически университет - Варна
Доц. д-р Здравко Славов – Варненски свободен университет
ст. ас. Йордан Петков - Икономически Университет - Варна

1. Оптимални решения и неопределеност на средата

Може да се твърди, че голяма част от социалните и икономическите решения трябва да отчитат противоречивите и несъвпадащи интереси на участниците. Теорията на игрите се е натоварила с нелеката задача да моделира процеса на вземане на тези решения. Тук се говори не въобще за решения, а за оптимални решения. Понятието "оптималност" е основно. Тъй като теорията на игрите се явява теория на формалните модели, то всяко основно понятие също трябва да носи формално-моделен характер, т.е. да отразява някое съдържателно понятие. Ето защо в теория на игрите оптималността е формален модел на обективната разумност, изгодност, целесъобразност, справедливост, осъществимост или устойчивост. Всички тези понятия в теорията на игрите са синоними на думата "оптималност".

Игрите с природата са специфични игрови модели, явяващи се част от теорията за вземане на решения, при която решенията се вземат в условията на неопределеност на средата и риск, като евентуално може да липсва конфликтен отенък. Тези модели представляват игра между играч, наречен лицето вземащо решението (накратко ЛВР) и природата.

Понякога специалистите употребяват понятията "риск" и "неопределеност" като синоними, тъй като рискът възниква в случаите при вземане на решения в условия на неопределеност, в противен случай няма риск. Трябва да се има предвид, че рискът е субективен, а неопределеността е обективна. Обективното отсъствие на достоверна информация създава редица рискове за ЛВР. Тъй като неопределеността е източник на риск, тя трябва да се минимизира посредством получаване на повече информация и по този начин неопределеността да се сведе до нула в идеалния случай. На практика невинаги това е възможно. Ето защо, когато се взема решение в условията на неопределеност естествено се появява задачата за оценка на риска.

Рискът като измерител на неопределеността присъства в теорията за вземане на решения и се дефинира преди всичко като отклонение от очакваната стойност. Основно рискът се свързва с отклоненията в негативна посока, т.е. когато действителната стойност е по-малка от очакванията. Това създава предпоставки за търсене на различни математически методи за количествена оценка на риска.

2. Класификация на задачите за вземане на решения

В най-общ план задачата за вземане на решения може да се дефинира в следния вид: ЛВР избира едно решение (алтернатива) от дадено множество на възможни решения D, в резултат на което се получава даден изход от множеството на възможните изходи S. Тук трябва да отбележим, че изходът може да бъде еднозначно определен, а може да липсва еднозначността. В последния случай имаме неопределеност при определяне на изхода.

От една страна, различаваме два основни типа съответствия между множеството на решенията D и множеството на изходите S. Оттук следва следната класификация на задачите за вземане на решения при:

(1) Определеност или детерминираност

На всяко решение от D съответства точно един определен изход от S, т.е. съществува функцията $f : D \rightarrow S$. При тези задачи се използват методите на линейното, нелинейното, целочисленото, динамичното оптимиране, оптималното управление или други детерминирани методи.

(2) Неопределеност или недетерминираност

Еднозначното съответствие между D и S е нарушено, следователно съществува многозначното изображение $F : D \Rightarrow S$. Същността на неопределеността е в замяната на функционалната зависимост с многозначното изображение. Самата неопределеност може да се разглежда в следните четири аспекта:

(2.1.) Риск (рискова неопределеност)

Както при всяка неопределеност, така и при рисковата, на едно решение $d \in D$ съответстват няколко изхода от S, но при рисковата неопределеност се знае вероятността на всеки един изход. Следователно е известна вероятността $P_d(s)$ за всяко $s \in S$. Избира се такова решение, което носи най-голяма очаквана полезност на ЛВР. Оттук следва субективният характер на рисковата неопределеност, защото функцията на полезност има субективен характер и зависи от отношението на индивида към риска. Тук използваме теорията на риска, която задължително се свързва с някакво измерване на риска. В най-общ план, рискът се измерва с отклонението на действителния резултат от очаквания.

(2.2) Стратегическа неопределеност

При тази неопределеност еднозначното съответствие между D и S е нарушено от противодействие на участниците в реалните процеси. Ясно е, че това противодействие има активен субективен характер и се проявява в конфликтна ситуация. При вземането на решения трябва да се отчитат противоречивите интереси на заинтересуваните субекти. Тук се използва един от методите на изследване на операциите – теория на игрите.

(2.3.) Неопределеност на средата или несигурност

Еднозначното съответствие между D и S е нарушено от средата. Например при лоши климатични условия, природни бедствия, технически аварии, случайни колебания на макро- и микроикономическите показатели, търсенето, предлагането и др. Тук противодействието носи пасивно обективен характер и се използват методите на игрите с природата. За решаването на такива задачи се използват различни критерии, които подробно ще разгледаме по-късно.

(2.4.) Частична неопределеност

Отново еднозначното съответствие между D и S е нарушено. За разлика от рисковата неопределеност тук вероятностите на изходите са неизвестни. Следователно може да разглеждаме възможните изходи на всяко решение като случайна величина. Ако имаме възможност, провеждаме експеримент, обработваме емпиричните данни и получените резултати помагат да се вземе оптималното решение. Тук използваме методите за вземане на статистически решения (статистически игри).

Обобщавайки казаното по-горе, на схема 1 е направена една класификация на задачите за вземане на решение в зависимост от неопределеността.

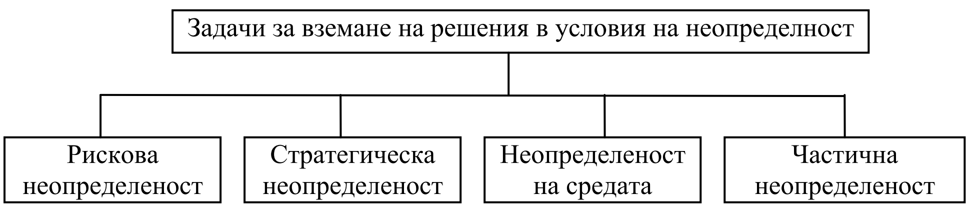

Схема 1

От друга страна, задачите за вземане на решения могат да се разделят на две основни групи: еднокритериални и многокритериални. В този случай класификация се прави на базата на броя на критериите, които ЛВР използва.

Също така задачите могат да се разделят на статични и динамични.

В резултат на голямото разнообразие и сложност на проблемите все още не съществува общоприета класификационна схема на задачите за вземане на решения. На схема 2 е представен един от възможните варианти за класификация на задачите за вземане на решения:

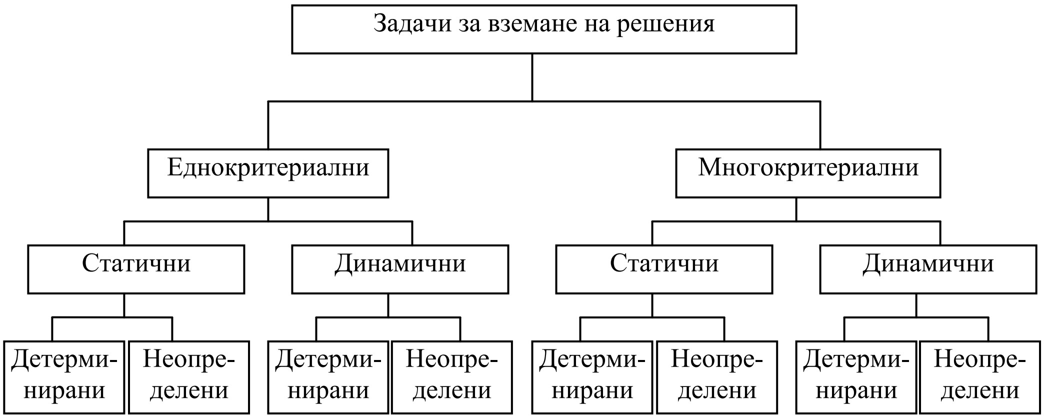

Схема 2

Естествено е да си зададем два въпроса. Първият въпрос е: Как ЛВР избира своето решение, т.е. какъв критерий използва? Вторият въпрос е: Каква е връзката между взетото решение и крайния изход?

Преди да отговорим на тези въпроси трябва да обърнем внимание на една важна особеност на задачите за вземане на решения. Тя се състои в предположението, че ЛВР се явява разумен играч, който се стреми да намери оптималното за себе си решение, а за природата (средата) имаме различни предположения. Най-често те са:

(1) Пасивна среда

Предполага се, че природата не се явява разумен играч. Следователно тя не се стреми да спечели играта и можем да приемем, че играе случайно. При пасивна среда ЛВР се стреми да вземе оптималното си решение, а предполагаме, че природата разполага с някакъв неизвестен механизъм за случаен избор на своя стратегия.

(2) Активна среда

Предполага се, че природата се явява разумен играч. Следователно предполагаме, че природата се стреми да спечели играта, т.е. както ЛВР, така и природата се стремят да намерят оптималните си стратегии. Например всеки търговец може да разглежда своята конкуренция като активна среда, която всячески му пречи да постигне своите цели.

(3) Вероятностна среда

Въз основа на някаква информация ЛВР може да направи предположения за разпределението на вероятностите на състоянията на природата. В този случай решението се взема на базата на предположеното вероятностно разпределение.

(4) Статистически игри

При тези игри ЛВР първо провежда статистически експеримент, а след това взема своето решение. По принцип статистическите игри се разглеждат отделно. Тук основно внимание се обръща на начина, по който получената от експеримента информация определя оптималното решение.

3. Ситуация за вземане на решение

Игрите с природата имат структура на игра с двама играчи: човек (наречен ЛВР) и природа (средата, в която се вземат решения). Играта е с нулева сума, т.е. имаме антагонистична игра. Разликата между тези игри и класическите антагонистични игри (и двамата играчи са хора) е, че имаме различни предположения за средата.

Ситуация за вземане на решение се характеризира със системата $\{D, \Omega, H\}$, където D е множеството от решенията на ЛВР, Ω е множеството от състоянията на природата, а $H : D \times \Omega \to R$ е целевата функция. Често стойностите на тази функция се наричат изходи. Ако ЛВР избере решение $d \in D$, възможните изходи са от множеството $\{H(d, \theta) \mid \theta \in \Omega\}$ и не е ясно кой точно от тях ще е налице. Липсва еднозначност на възможния изход от взетото решение и това не зависи от ЛВР, а зависи от неопределеността на природата.

В зависимост от множествата D и Ω се използват три подхода. При първия подход множествата D и Ω са дискретни. Естествено това е най-елементарния случай. Вторият подход е при непрекъснати множества. Третият случай представлява смесен модел при D дискретно, а Ω непрекъснато. Засега случая при D непрекъснато, а Ω дискретно не се радва на популярност.

Да се спрем по-подробно на дискретния случай. Нека множеството от алтернативните решения (стратегии) на ЛВР е $D = \{d_1, d_2, ..., d_n\}$, $n \geq 2$. Съответно нека множеството от състоянията на природата е $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m\}$, $m \geq 2$. Числото $h_{ij} = H(i, j)$ означава печалбата на ЛВР при негово решение $d_i \in D$ и състояние на природата $\theta_j \in \Omega$. Така получаваме платежната матрица на играта $H = \lfloor h_{ij} \rfloor_{i=1 \div n, j=1 \div m}$. Ако ЛВР избере решение $d_i \in D$, то възможните m на брой изходи са $h_{i1}, h_{i2}, ..., h_{im}$.

Понякога е възможно да се намали броят на алтернативните решения, като някои решения може да не се разглеждат. Ако в задачата се търси решение, при което се достига максимум и за две различни решения $d_k, d_i \in D$ са изпълнени неравенствата $h_{kj} \geq h_{ij}$ за всяко $j \in \{1, 2, ..., m\}$ и $h_{kj} > h_{ij}$ за поне едно $j \in \{1, 2, ..., m\}$, то казваме, че решение d_k доминира решение d_i. Тогава решението $d_i \in D$ може да не се разглежда по-нататък.

Числото $R(i, j) = \max\limits_k H(k, j) - H(i, j)$ ще измерва риска на ЛВР при вземане на решение $d_i \in D$ и състояние на природата $\theta_j \in \Omega$. Ясно е, че $r_{ij} = R(i, j) \geq 0$ и рискът винаги е равен на нула за най-доброто решение на ЛВР при дадено състояние на природата. Така получаваме матрица на риска $R = \lfloor r_{ij} \rfloor_{i=1 \div n, j=1 \div m}$.

4. Критерии за вземане на решение

При различните предположения за неопределеност на средата се прилагат различни критерии.

4.1. Критерии при пасивна среда

Предполагаме, че знаем възможните състояния на природата $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$, но не знаем вероятностите на тези състояния. В този случай е подходящо да се приложи “принципът на недостатъчното основание”, известен още като критерий на Бернули-

Лаплас. Според този принцип се приема, че всички възможни състояния на природата са равновероятни, когато не разполагаме с друга информация.

Също така ще предполагаме още, че ЛВР се стреми към максимална печалба. При тези предположения ще разгледаме няколко критерия за вземане на решение.

(1) Принцип на доминираща резултат

Ако ЛВР е краен оптимист, то той ще избере такова решение $d_k \in D$, при което $h^* = H(k,l) = \max_i \max_j H(i,j)$. Крайният оптимизъм се състои в предположението, че състоянието на природата ще бъде $\theta_l \in \Omega$, т.е. най-изгодното за ЛВР състояние. Печалбата на ЛВР в този случай ще бъде h^*.

Естествено е да предположим, че очакванията на ЛВР може да не се сбъднат, т.е. той да очаква да получи печалба h^*, а в действителност да получи по-малка. Ясно е, че $h_{kj} \le h^*$ за всяко $j \in \{1,2,...,m\}$. Следователно отклоненията от очакваната стойност h^* са само в по-малки стойности. Като величина, измерваща риска на ЛВР, използваме стандартното отклонение относно h^*, т.е. рискът е $\sigma_k(h^*) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(h_{kj} - h^*)^2}$.

Пример 1. Двама души играят следната игра. Първият играч е активен, а вторият е пасивен. Вторият играч има две нормални монети и преди да ги хвърли, първият трябва да вземе едно от следните две алтернативни решения: първо решение – залага 1 лев. В този случай, ако се паднат еднакви страни на двете монети, си връща заложения лев и печели от пасивния играч още два лева, а ако се паднат различни страни, губи заложения лев. Второто решение – залага 2 лева. В този случай, ако се паднат еднакви страни на двете монети, губи заложените 2 лева, а ако се паднат различни страни, си връща заложените 2 лева и печели от пасивния играч още 1 лев. Да се намери оптималното решение на активния играч, като се използва критерият на оптимиста.

Решение. В тази задача активният играч е ЛВР, а пасивният е природата. Решенията на ЛВР са: d_1='залага 1 лев' и d_2='залага 2 лева'. Състоянията на природата са: θ_1='падат се еднакви страни на двете монети' и θ_2='падат се различни страни на двете монети'. За печалбата на ЛВР получаваме таблицата:

Решения	Състояния на природата		$\max_j$
	θ_1	θ_2	
d_1	2	-1	2
d_2	-2	3*	3*

Окончателно получаваме, че според критерия на оптимиста оптималното решение е d_2, защото $h^* = 3 = H(2,2) = \max_i \max_j H(i,j)$. За стандартното отклонение относно очакваната печалба, като измерител на риска, получаваме $\sigma_2(3) = \sqrt{\frac{1}{2}((-2-3)^2 + (3-3)^2)} \approx 3{,}5$. Естествено при краен оптимизъм в условия на неопределеност е да имаме големи очаквания за печалбата и голям риск.

Аналогично можем да въведем критерия на крайния песимист, т.е. ако ЛВР е краен песимист, то той ще избере такова решение $d_k \in D$, при което $h^* = H(k,l) = \min_i \min_j H(i,j)$. Ясно е, че такова решение е лишено от здрав разум.

(2) Критерий на Уолд (критерий на гарантирания резултат или разумния песимист)

При този критерий на всяко състояние на природата се намира минималната печалба $\min_j H(i,j)$. След това се определя това решение $d_k \in D$, при което се достига до максималната от тези минимални печалби. Символично този критерий се записва с израза $h^* = H(k,l) = \max_i \min_j H(i,j)$. Печалбата на ЛВР в този случай ще бъде h^*.

Имаме, че $h_{kj} \geq h^*$ за всяко $j \in \{1,2,...,m\}$. Следователно отклоненията от очакваната стойност h^* са само в по-големи стойности. Ако рискът е свързан с отклоненията в отрицателна посока, то следва, че рискът е нулев.

Пример 2. Управителният съвет на едно предприятие обсъжда как предприятието да работи в кризисната ситуация, в която се намира отрасълът. Предприятието може да работи при три възможности на натоварване на производствените мощности – малко (около 30 %), средно (около 60 %) и голямо (около 90 %). Предвид кризисната ситуация не е ясно какво ще бъде търсенето на продукцията на предприятието. Предполага се, че то може равновероятно да бъде ниско или високо. Експертите на предприятието пресметнали, че печалбата от продажбите на продукцията ще бъдат както следва: при малко натоварване – съответно 400 хил. лв. и 380 хил. лв., при средно натоварване – съответно 430 хил. лв. и 440 хил. лв. и при голямо натоварване – съответно 320 хил. лв. и 520 хил. лв. Да се намери оптималното решение, като се използва критерият на Уолд.

Решение. Възможните алтернативни решения са: d_1='малко натоварване', d_2='средно натоварване' и d_3='голямо натоварване'. Състоянията на средата са: θ_1='ниско търсене' и θ_2='високо търсене'. Получаваме таблицата:

Решения	Състояния на търсенето		$\min_j$
	θ_1	θ_2	
d_1	400	380	380
d_2	430*	440	430*
d_3	320	520	320

Получаваме, че според критерия на Уолд оптималното решение е d_2 и гарантираната минимална печалба на предприятието е 430 хил. лв. (при състояние θ_1). Оптималното решение е отбелязано с "*" в горната таблица. Ако управителният съвет се придържа към решение d_2, няма риск печалбата да намалее, а има възможност при състояние θ_2 да се увеличи с 10 хил. лв.

(3) Критерий на Севидж

Този критерий работи с матрицата на риска R. При него се минимизира рискът при избора на решение, т.е. определя се това решение $d_k \in D$, при което се достига до минимален риск. Символично се записва с израза $R(k,l) = \min_i \max_j R(i,j)$.

Пример 3. Ръководството на предприятие, след като проучва пазара, решава да се организира производството на нов вид изделие. Мениджърите на предприятието осъзнават, че икономическите резултати ще зависят от състоянието на икономиката. Разходите, свързани с организацията на производството на новия вид изделия, възлизат на 30 хил. лв. Себестойността на единица изделие от новия вид е 10 лв., а продажната цена е 20 лв. Предприятието възнамерява да произведе 12 000 изделия, ако икономиката е силна, и 9000 изделия, ако икономиката е слаба. Ръководството на предприятието оценява дохода от производството на стария продукт на 140 хил. лв. при силна икономика и 50 хил. лв. при слаба икономика. Съществуват две алтернативи – да се произвежда стария вид изделия или да се започне производството на новия вид изделия.

Решение. Възможните алтернативни решения са: d_1='произвежда се стария вид изделия' и d_2='започва се производството на новия вид изделия'. Състоянията на средата са: θ_1='икономиката е силна' и θ_2='икономиката е слаба'.

За новия вид изделия, ако икономиката е силна, то доходът ще бъде $12\,000.(20-10)-30\,000=90\,000$, а при слаба икономика ще бъде $9000.(20-10)-30\,000=60\,000$. Доходът в хил. лв. се задава с платежната таблица:

Решения	Състояния на търсенето	
	θ_1	θ_2
d_1	140	50
d_2	90	60
$\max\limits_i$	140	60

Съответно получаваме таблицата на риска:

Решения	Състояния на търсенето		$\max\limits_j$
	θ_1	θ_2	
d_1	0	10*	10*
d_2	50	0	50

Получаваме, че, според критерия на Севидж оптималното решение е d_1 (посочено с „*" в горната таблица), т.е. да продължи производството на стария вид изделия.

(4) Критерий на Хурвиц

Първо, ЛВР избира числото $\lambda \in [0;1]$, което се нарича коефициент на песимизма. Определя се такова решение $d_k \in D$, при което се достига до максимална печалба при състояние на природата между оптимиста и песимиста. Символично този критерий се записва с израза $h^* = H(k,l) = \max\limits_i(\lambda \min\limits_j H(i,j) + (1-\lambda)\max\limits_j H(i,j))$. При $\lambda = 0$ получаваме критерия на оптимиста, а при $\lambda = 1$ – критерия на песимиста. Коефициентът λ се избира по субективни съображения. Например, ако искаме да се застраховаме от смели решения и не желаем да вземем рисковано решение, то трябва да изберем λ близо до единица. В противен случай избираме λ близо до нула.

Тук добре се вижда, че е удачно рискът да се свързва само с отклонения относно h^* с по-малки стойности. В този случай използваме полустандартното (семистандартното) отдолу отклонение относно h^*.

Ако имаме поне една стойност $h_{kj} < h^*$, то нека техният брой е $p \ge 1$. Полагаме

$$h'_{kj} = \begin{cases} h_{kj}, & h_{kj} < h^* \\ h^*, & h_{kj} \geq h^* \end{cases}$$

и пресмятаме полустандартното отдолу отклонение $S\sigma_k^{0-}(h^*) = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}(h'_{kj} - h^*)^2}$.

Ако имаме $h_{kj} \geq h^*$ за всяко $j \in \{1,2,...,m\}$, то $S\sigma_k^{0-}(h^*) = 0$.

Възможно е рискът да се оцени и със стандартното отклонение относно h^*.

Пример 4. Ръководството на предприятие, след като проучва пазара, решава, че може да организира производството на едно от три нови изделия. Осъзнава, че икономическите резултати на предприятието ще зависят от състоянието на икономиката, което може да бъде: силна, средна или слаба. Ръководството на предприятието оценява дохода от производството на първия вид изделия на 50 хил. лв. при силна икономика, 20 хил. лв. при средна икономика и 10 хил. лв. при слаба икономика. За втория вид изделия доходът е съответно – 40 хил. лв., 30 хил. лв. и 20 хил. лв. За третия вид изделия доходът е съответно – 60 хил. лв., 10 хил. лв. и 10 хил. лв. Съществуват три алтернативи – да се произвеждат нови изделия или от първи, или от втори, или от трети вид. Да се намери оптималното решение според критерия на Хурвиц при $\lambda = 0{,}7$, т.е. близко по песимистичното решение.

Решение. Възможните алтернативни решения са: d_1='произвежда се първия вид нови изделия', d_2='произвежда се втори вид нови изделия' и d_3='произвежда се трети вид нови изделия'. Състоянията на средата са: θ_1='икономиката е силна', θ_2='икономиката е средна' и θ_3='икономиката е слаба'. Нека означим $a_i = \min_j H(i,j)$, $b_i = \max_j H(i,j)$ и $c_i = \lambda.a_i + (1-\lambda).b_i$. Доходът се задава с платежната таблица:

Решения	Състояния на икономиката					
	θ_1	θ_1	θ_1	a_i	b_i	c_i
d_1	50	20	10	10	50	22
d_2	40	30	20	20	40	26*
d_3	60	10	10	10	60	25

Получаваме, че според критерия на Хурвиц при $\lambda = 0{,}7$ оптималното решение е d_2 (посочено с „*" в горната таблица), т.е. да се произвежда втори вид нови изделия.

За оценка на риска използваме полустандартното отдолу отклонение $S\sigma_2^{0-}(26) = \sqrt{(20-26)^2} = 6$.

(5) Критерий на Лаплас

При този критерий намираме средната цена $m_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} h_{ij}$ на всяко решение $d_i \in D$ при $i = 1,2,...,n$. ЛВР избира решението с най-голяма средна цена, т.е. избира решение $d_k \in D$ такова, че $m_k = \max_i m_i$.

Като измерител на риска използваме стандартното отклонение $\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(h_{kj} - m_k)^2}$. Известно е, че $\sum_{j=1}^{m}(h_{kj} - m_k) = 0$, следователно имаме както положителни, така и отрицателни отклонения $h_{kj} - m_k$. Освен σ_k като измерител на риска можем да използваме и полустандартното отдолу отклонение $S\sigma_k^{0-} = S\sigma_k^{0-}(m_k) = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}(h'_{kj} - m_k)^2}$. Тук отклонението е относно m_k.

Сега да насочим вниманието си към матрицата на риска. Известно е, че $r_{ij} = \max_k h_{kj} - h_{ij}$. Така получаваме, че $r_{ij} + h_{ij} = \max_k h_{kj}$ или $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r_{ij} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} h_{ij} = \max_k h_{kj}$. Окончателно имаме, че за всяко решение $d_i \in D$ е в сила равенството $m_i(r) + m_i(h) = const$ или $\min_i m_i(r) = const - \max_i m_i(h)$. Изводът е, че решението, при което се получава най-голяма средна цена, съвпада с решението, при което имаме най-малък среден риск.

<u>Пример 5</u>. Търговско дружество разполага с две алтернативни решения: d_1='производство на дървени маси' и d_2='производство на метално-стъклени маси'. Мениджърският екип на дружеството разглежда три състояния на пазара на маси: θ_1='ниско търсене', θ_2='средно търсене' и θ_3='високо търсене'. Експерти оценили годишните печалби в хиляди лева при вземането на различните решения при различните състояния на пазара и тяхното мнение е дадено в таблицата:

Решения	Състояния на пазара		
	θ_1	θ_2	θ_3
d_1	100	200	330
d_2	60	170	370

Да се намери оптималното решение, като се използва критерият на Лаплас.

<u>Решение</u>. Намираме средните печалби за всяко едно от решенията:

$$m_1(h) = \frac{1}{3}(100 + 200 + 330) = 210\,*;$$

$$m_2(h) = \frac{1}{3}(60 + 170 + 370) = 200.$$

Получаваме, че оптималното решение е d_1, т.е. търговското дружество да произвежда дървени маси и ще получава средна печалба от 210 хил. лв.

За таблицата на риска получаваме:

Решения	Състояния на пазара		
	θ_1	θ_2	θ_3
d_1	0	30	0
d_2	40	30	40

Намираме средните рискове за всяко едно от решенията:

$$m_1(r) = \frac{1}{3}(0 + 30 + 0) = 10\,*;$$

$$m_2(r) = \frac{1}{3}(40 + 0 + 40) = 26\frac{2}{3}.$$

Получаваме, че $m_1(r) = \min\limits_i m_i(r)$, т.е. оптималното решение отново е d_1.

Сега да пресметнем риска при вземане на решение d_1. Ако използваме стандартното отклонение като измерител на риска получаваме $\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{3}((100-210)^2 + (200-210)^2 + (330-210)^2)} \approx 94$, а ако използваме полустандартното отдолу отклонение получаваме $S\sigma_1^{0-} = \sqrt{\frac{1}{2}((100-210)^2 + (200-210)^2)} \approx 78$. Следователно рискът е 94 хил. лв. или 78 хил. лв. в зависимост от използваната методика за тълкуване и пресмятане на риска.

(6) Критерий на минималния риск при пасивна среда

Търсим такова решение $d_k \in D$, че $\sigma_k = \min\limits_i \sigma_i$, т.е. което има минимално стандартно отклонение (полустандартното отдолу отклонение).

(7) Критерий "средна цена – риск при пасивна среда"

Този критерий представлява обобщение на критерия на Лаплас. Всяко алтернативно решение $d_i \in D$ се характеризира със средна цена $m_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} h_{ij}$ и стандартно отклонение $\sigma_i = \sigma_i(m_i) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(h_{ij} - m_i)^2}$. Тук стандартното отклонение σ_i е измерител на риска на решение $d_i \in D$. Ясно е, че оптималното решение ще бъде с максимална средна цена и минимално стандартно отклонение. Следователно имаме двукритериална задача.

В горния анализ можем да заменим стандартното отклонение σ_i с полустандартното отдолу отклонение $S\sigma_i^{0-}$.

Да разгледаме всички възможните случаи и да посочим по-доброто решение, сравнявайки две различни решения $d_i, d_k \in D$ в основа на анализа "средна цена – риск при пасивна среда":

(i) При $m_i = m_k$ и $\sigma_i = \sigma_k$

Двете решение са еднакво приемливи за ЛВР, защото имат равни средни цени и равни стандартни отклонение и ако трябва да се избере едно от тях, то трябва допълнителен анализ.

(ii) При $m_i = m_k$ и $\sigma_i < \sigma_k$

Двете решения имат равни средни цени, но рискът на решение $d_i \in D$ е по-малък от риска на решение $d_k \in D$. В този случай е удачно да се избере решение $d_i \in D$.

(iii) При $m_i > m_k$ и $\sigma_i = \sigma_k$

Двете решения имат равни стандартни отклонения, т.е. те са равно рискови, но средната цена на решение $d_i \in D$ е по-голяма от средната цена на решение $d_k \in D$. В този случай е удачно да се избере решение $d_i \in D$.

(iv) При $m_i > m_k$ и $\sigma_i < \sigma_k$

Решение $d_i \in D$ има по-голяма средна цена и по-малък риск от решение $d_k \in D$. В този случай е удачно да се избере решение $d_i \in D$.

(v) При $m_i > m_k$ и $\sigma_i > \sigma_k$

Решение $d_i \in D$ има по-голяма средна цена и по-голям риск от решение $d_k \in D$. Следователно е необходим допълнителен анализ за рационален избор между двете решения.

<u>Пример 6</u>. Ръководството на търговско дружество решава да разшири производството си и за тази цел възнамерява да построи нова фабрика. Съществуват три алтернативни решения за големината на фабриката – d_1='голяма', d_2='средна' и d_3='малка'. Размера на фабриката зависи от търсенето на продукцията, което може да бъде θ_1='голямо', θ_2='средно' и θ_3='малко'. Маркетинговият мениджър, след предварително проучване на пазара, определя печалбата в хил. лв. от продажбите на продукцията при различните решения и получените резултати са поместени в таблицата:

Решения	Състояния на търсенето		
	θ_1	θ_2	θ_3
d_1	150	120	90
d_2	140	130	90
d_3	120	110	100

Да се намери оптималното решение по критерия "средна цена – риск при пасивна среда".

<u>Решение</u>. За всяко решение намираме средната печалба и стандартното отклонение:

$$m_1 = \frac{1}{3}(150 + 120 + 90) = 120;$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{3}((150 - 120)^2 + (120 - 120)^2 + (90 - 120)^2)} \approx 24{,}5;$$

$$m_2 = \frac{1}{3}(140 + 130 + 90) = 120;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{3}((140 - 120)^2 + (130 - 120)^2 + (90 - 120)^2)} \approx 21{,}6;$$

$$m_3 = \frac{1}{3}(120 + 110 + 100) = 110;$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{1}{3}((120 - 110)^2 + (110 - 110)^2 + (100 - 110)^2)} \approx 8{,}2.$$

Окончателно за решение d_1 получаваме $m_1 = 120$ и $\sigma_1 \approx 24{,}5$, за d_2 - $m_2 = 120$ и $\sigma_2 \approx 21{,}6$, а за d_3 - $m_3 = 110$ и $\sigma_3 \approx 8{,}2$.

Сравнявайки решения d_1 и d_2, получаваме, че двете решения имат равни средни печалби, но d_2 е по-малко рисково. Следователно решение d_2 е по-добро от решение d_1.

Сравнявайки решения d_1 и d_3 получаваме, че не можем да определим кое от двете решение е по-добро. Същото важи и за решения d_2 и d_3.

Окончателно можем да кажем, че според този критерий не можем да определим единствено оптималното решение. Единствено може да кажем, че решение d_2 е по-добро от d_1, а от решения d_2 и d_3 няма по-добри (решения, оптимални по Парето).

4.2. Активна среда

Тази задача е еквивалентна на антагонистична игра с двама играча и нулева сума. Трябва да се намери такова решение в чиста или смесена стратегия, така че да бъде най-изгодно в сравнение с останалите. За тази цел ще използваме платежната матрица H.

Известно е, че при $\max\limits_i \min\limits_j h_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i h_{ij}$ матрицата H има седлова точка, т.е. ЛВР има оптимално решение $d_k \in D$ такова, че $h^* = H(k,l) = \max\limits_i \min\limits_j H(i,j)$ и "най-добрата" защита на природата е състояние $\theta_l \in \Omega$. В този случай казваме, че играта има решение в чисти стратегии и ако ЛВР избере решение $d_k \in D$, то има гарантирана печалба $h^* = h_{kl}$ без риск. При отклонение от това решение е възможно да се получи по-малка печалба. Намереното оптимално решение в този случай съвпада с оптималното решение при критерия на Уолд.

Пример 7. Голям хотел на брега на морето предлага на своите гости храна, спане и плаж. С цел да направи по-атрактивни оферти пред своите клиенти маркетинговият отдел предлага на борда на директорите две стратегии за новия сезон. При първата стратегия цените са силно обвързани със слънчевите дни, подходящи за плаж, т.е. туристите заплащат повече при слънчево време и по-малко при облачно време. При втората стратегия тази обвързаност липсва, т.е. туристите заплащат една и съща цена при различно времето. Известно е, че при силен сезон (повече слънчеви дни) печалбата на хотела е по-голяма отколкото при слаб сезон (по-малко слънчеви дни). Маркетинговият отдел пресметнал също, че, ако сезона се окаже силен, при първата стратегия печалбата е 23 мил. лв., а при втората – 18 мил. лв. При слаб сезон печалбата е съответно 5 мил. лв. и 10 мил. лв. Повечето членове в борда на директорите са песимисти и смятат, че природата активно им пречи на печалбата. Да се намери оптималното решение на борда на директорите при активна среда.

Решение. Решенията на ЛВР (борда на директорите) са: d_1='приема се първата стратегия' и d_2='приема се втората стратегия'. Състоянията на природата са: θ_1='силен сезон' и θ_2='слаб сезон'. За печалбата на ЛВР получаваме таблицата:

Решения	Състояния на сезона		$\min\limits_j$
	θ_1	θ_2	
d_1	23	5	5
d_2	18	10*	10*
$\max\limits_i$	23	10*	

От горната таблица намираме, че $\max\limits_i \min\limits_j h_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i h_{ij} = 10$ (отбелязано с *). Следователно оптималното решение на борда на директорите е d_2. При "най-лошо поведение на природата" хотелът има гарантирана печалба от 10 млн. лв. без риск.

При $\max\limits_i \min\limits_j h_{ij} < \min\limits_j \max\limits_i h_{ij}$ нямаме решение в чисти стратегии и трябва да търсим решение в смесени стратегии. Нека решенията на ЛВР и състоянията на природата са независими. Разглеждаме платежната матрица H като случайна величина. Предполагаме, че състоянието на природата $\theta_j \in \Omega$ има вероятност p_j, а ЛВР избира решение $d_i \in D$ с вероятност q_i. Ясно е, че $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$ и $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$. Разглеждаме средната печалба, т.е. функцията $V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} q_i . h_{ij} . p_j$, която зависи от числата $q_1, q_2, ..., q_n$ и $p_1, p_2, ..., p_m$. ЛВР трябва да избира алтернативните решения d_i с вероятност q_i, а природата да се "защитава", като сменя състоянията си θ_j с вероятност p_j. Оптималното решение в смесени стратегии е при такива вероятности $q_1, q_2, ..., q_n$ и $p_1, p_2, ..., p_m$, за които се достига $\max_q \min_p V = \min_p \max_q V$. Доказва се, че за всяка матрица H такова решение съществува.

Ако сравним горното с критерия на Уолд, виждаме, че $\max_i \min_j h_{ij}$ е гарантираният минимум на ЛВР, а $\min_j \max_i h_{ij}$ е цената при "най-добрата защита" на природата. Когато имаме разминаване между тях съществува по-добро решение за ЛВР. Това са смесените стратегии. В случая ЛВР намира по-добро решение от критерия на Уолд.

4.3. Вероятностна среда

Предполагаме, че знаем както възможните състояния на природата $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$, така и вероятностите на тези състояния, т.е. знаем числата $p_j = P(\theta_j)$ при $j = 1,2,...,m$ такива, че $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$. В този случай се използват следните критерии:

(1) Критерий на най-вероятното състояние

ЛВР съзнава, че природата може да бъде в различни състояния, но знае най-вероятното състояние $\theta_l \in \Omega$, т.е. $P(\theta_l) = \max_j P(\theta_j)$. Най-доброто решение $d_k \in D$ е това, при което $h^*(k) = H(k,l) = \max_i H(i,l)$. Ако природата има повече от едно най-вероятно състояния, избираме това решение при което имаме максимален изход.

Отчитане на риска е удачно да стане с полустандартното отдолу отклонение $S\sigma_k^{0-}$, а не със стандартното отклонение σ_k.

(2) Критерий за средната цена (критерий на Бейс)

Да означим математическото очакване на цената $E(i) = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} . p_j$ за всяко алтернативно решение $d_i \in D$. ЛВР избира решението $d_k \in D$ с най-голямо математическо очакване на цената, т.е. $E(k) = \max_i E(i)$.

Отчитането на риска може да направим както с полустандартното отдолу отклонение $S\sigma_k^{0-}$, така и със стандартното отклонение σ_k.

Пример 8. Търговско дружество планира да намали разходите си, като въведе една от 5 нови вида опаковки на своите продукти. За целта има 5 алтернативни решения d_1, d_2, d_3, d_4 и d_5. Възможните състояния на пазара за материали за опаковки са три – θ_1, θ_2 и θ_3. Специалистите от маркетинговия отдел определили, че с новите опаковки дружеството ще спести от разходите си. Информацията за спестените месечни разходи в хил. лв. е дадена в таблицата:

Решения	Състояния на пазара за материали за опаковки		
	θ_1	θ_2	θ_3
d_1	10	20	30
d_2	20	15	20
d_3	20	40	10
d_4	30	5	10
d_5	4	50	2

Експерти определили, че вероятностите на състоянията на пазара за материали на опаковки са: $P(\theta_1) = 0{,}25$, $P(\theta_2) = 0{,}40$ и $P(\theta_3) = 0{,}35$.

Да се намери оптималното решение по критерия за средната цена (средните спестени разходи).

Решение. Ще намерим математическото очакване на всяко едно решение:

$E(1) = 10.0{,}25 + 20.0{,}40 + 30.0{,}35 = 21$;

$E(2) = 20.0{,}25 + 15.0{,}40 + 20.0{,}35 = 18$;

$E(3) = 20.0{,}25 + 40.0{,}40 + 10.0{,}35 = 24{,}5$;

$E(4) = 30.0{,}25 + 5.0{,}40 + 10.0{,}35 = 13$;

$E(5) = 4.0{,}25 + 50.0{,}40 + 2.0{,}35 = 21{,}7$.

Оптималното решение според този критерий е d_3, защото $\max\limits_i E(i) = 24{,}5$.

За отчитането на риска ще използваме стандартното отклонение. Така получаваме $\sigma_3 = \sqrt{(20-24{,}5)^2.0{,}25 + (40-24{,}5)^2.0{,}40 + (10-24{,}5)^2.0{,}35} \approx 13{,}2$.

(3) Критерий за средния риск

Този критерий е аналогичен на предходния, но се работи с матрицата на риска R. ЛВР избира решението с най-малко математическо очакване на риска.

(4) Критерий при известен закон на разпределение с неизвестен параметър

Тази ситуация се характеризира с даден закон на разпределение на вероятностите с неизвестни параметри. За оценка на параметрите на закона на разпределение на вероятностите може да се използва методът на максималното правдоподобие.

Нека плътността на разпределение на вероятностите е $p(x,b)$, където b е неизвестен параметър. Ако случайната величина X в резултат на n опита приема стойностите $x_1, x_2, ..., x_n$, то най-голямото (максималното) правдоподобно значение на параметъра b се получава от максималното значение на функцията

$$L(x_1, x_2, .., x_n, b) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, b),$$

където n е обемът на извадката.

По- често се използва логаритмична функция на правдоподобие

$$\ln L(x_1, x_2, .., x_n, b) = \ln \prod_{i=1}^{n} p(x_i, b) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \ln p(x_i, b).$$

От уравнението $\dfrac{d \ln L}{db} = 0$ се намира параметърът b.

Пример 9. Съществува възможност за инвестиране в един от трите проекта A, B, C. Статистическите данни за възвръщаемостите (за 10 периода) са приведени в следната таблица.

Проект	Размер на възвръщаемостта									
A	0,24	0,34	0,39	0,42	0,46	0,48	0,53	0,58	0,62	0,7
B	0,18	0,28	0,36	0,42	0,48	0,49	0,54	0,57	0,61	0,68
C	0,2	0,32	0,4	0,45	0,46	0,5	0,51	0,54	0,58	0,72

Да се направи анализ на риска:

а) от гледна точка на математическото очакване, стандартното и семистандартното отклонение на очаквания резултат от средноаритметичната стойност;

б) при предположение, че плътността на разпределение на вероятностите се задава с функцията

$$p(x,b)=\begin{cases}\dfrac{4}{b^3\sqrt{\pi}}x^2e^{-\frac{x^2}{b^2}}, & x\ge 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}.$$

Решение

а) Приема се, че разпределението на вероятностите е $p=\left\{p_i=\dfrac{1}{10}, i=\overline{1,10}\right\}$, след което се намират:

- средната възвръщаемост на всеки проект:

$$m_A=H_i^+(x_i,p)=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=0,476;\ \ m_B=0,503;\ \ m_C=0,468;$$

- стандартното му отклонение:

$$\sigma_A=\sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-m_A\right)^2}=0,16011;\ \ \sigma_B=0,15343;\ \ \sigma_C=0,13189;$$

и полустандартното му отклонение:

$$S\sigma_A^{0-}=0,13037;\ \ S\sigma_B^{0-}=0,17427;\ \ S\sigma_C^{0-}=0,14053.$$

От гледна точка на σ (риска) оптимален е проект C.

От гледна точка на семистандартното отклонение оптимален е проект A.

б) Логаритмичната функция на правдоподобие е

$$\ln L(x_1,x_2,...,x_n,b)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{4x_i^2}{b^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{b^2}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{4x_i^2}{\sqrt{\pi}}-3\ln b-\frac{x_i^2}{b^2}\right).$$

За нейната производна се получава

$$\frac{d\ln L}{db}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{3}{b}+\frac{2x_i^2}{b^2}\right)=\frac{2}{b^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{3n}{b}.$$

Като се вземе предвид, че $b>0$ и се приравни $\dfrac{d\ln L}{db}=0$, т.е. $\dfrac{2}{b^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\dfrac{3n}{b}=0$,

се намира $b=\sqrt{\dfrac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$.

Тъй като $n=10$ (брой периоди), то

$$b_A=\sqrt{\frac{2}{3.10}\sum_{i=1}^{10}x_i^2}=0,40294;\ \ b_B=0,39607;\ \ b_C=0,39774.$$

Следователно за математическото очакване на възвръщаемостите се получава:

$$m_A = \frac{2b_A}{\sqrt{\pi}} = 0,45466; \quad m_B = 0,44693; \quad m_C = 0,44883,$$

а за стандртното отклонение–

$$\sigma_A = b_A\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}} = 0,19188; \quad \sigma_B = 0,18861; \quad \sigma_C = 0,18940.$$

От гледна точка на критерия на Бейс и критерия на минималната дисперсия, практически са равноценни и трите проекта. Малко предимства има проект В – малко по- малък риск.

4.4. Статистически игри

Всички статистически игри имат еднаква структура, подобна на стратегическа игра с двама играчи: човек (субект на управление) и природата (средата) с използване на допълнителна статистическа информация за стратегиите на природата (състоянията на икономическата среда). Първоначално се определя изходната стратегическа игра $\Gamma = \langle \Omega, D, L \rangle$ на статистическата задача за вземане на решение, където:

Ω – множество от състоянията $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ на природата (средата);

D – множество от решенията (стратегиите) $d_1, d_2, ..., d_n$ на статистика (субекта на управлението);

$L(\theta, d)$ – функция (матрица) на загубите. Тя показва загубата, която понася статистикът, когато избере решението (стратегията) си $d \in D$, ако състоянието на природата е $\theta \in \Omega$.

Преди да вземе решение коя стратегия да използва, статистикът може да проведе експеримент, в резултат на което да получи вектор $X = (x_1, x_2, .., x_n)$ – вектор на експеримента, разпределението на който зависи от състоянието на природата θ.

На основата на направения експеримент се дефинира множеството на чистите функции на решение *A*. Функцията $a(x)$ $(a: X \to D, x \in X, d \in D, a(x) = d)$, която изобразява вектора на експеримента *X* в множеството на решенията (стратегиите) *D* на статистика, се нарича чиста (нерандомизирана) функция на решенията на статистика.

Нека $P(x|\theta)$ е условното разпределение на случайната величина *X*, която статистикът може да наблюдава. Значенията на случайната величина *X* му дава косвена информация за състоянието на средата (природата). Тогава характеристика на функцията на решенията $a(x)$ се явява функцията на риска.

Функцията $R(\theta, a) = \mathrm{E}L(\theta, d)$, определена върху $\Omega \times A$ и приемаща реални стойности, се нарича функция на риска. Тя е математическото очакване на функцията на загубите при определени състояния на средата θ и зададена условна функция на разпределение $P(x|\theta)$.

Благодарение на използваната статистическа информация от експеримента *X* изходната стратегическа игра $\Gamma = \langle \Omega, A, L \rangle$ се преобразува в нова статистическа игра $G = \langle \Omega, A, R \rangle$. Тя е игра с двама играчи (статистик и природа) с нулева сума, в която стратегиите на статистика се изразяват с чистите функции на решение $a(x)$, а печалбата – с функцията (матрицата) на риска $R(\theta, a)$.

Пример 10. В края на зимата в търговски магазин са останали непродадени 1250 зимни палта със средна продажна цена 130 лв. при средна покупна цена 80 лв. Фирмата обмисля четири възможни намаления:

$$d_1 = 10\ \%, d_2 = 20\ \%, d_3 = 30\ \%, d_4 = 40\ \%.$$

Възможните състояния на природата (еластичността на търсенето от цената) са две:

θ_1 – ниска еластичност на търсене;

θ_2 – висока еластичност на търсене.

Проучванията показват, че при състояние на природата θ_1 решението d_1 за 10 % намаление на цената ще доведе до продажбата на 500 палта, решението d_2 за 20 % намаление на цената ще доведе до продажбата на 600 палта, решението d_3 за 30 % намаление на цената ще доведе до продажбата на 750 палта и решението d_4 за 40 % намаление на цената ще доведе до продажбата на 850 палта.

Аналогично при състояние на природата θ_1 решението d_1 води до продажба на 650 палта, решението d_2 – 900 палта, решението d_3 – 1000 палта и решението d_4 – 1125 палта. Значенията на функцията на загубите $L(\theta_j, d_i)$ се изчислява като разлика между стойността на непродадените 2500 палта и стойността на продажбите при намалените цени. Данните са представени в следната таблица:

Състояние θ_1						
Решение	Намаление на цените (%)	Нова цена (лв.)	Очаквана реализация на продукцията (бр.)	Очакван реализиран доход (лв.)	Покупна цена на 1250 бр./лв.	Очаквана загуба (лв.)
d_1	10	117	500	58 500	100 000	41 500
d_2	20	104	600	62 400	100 000	37 600
d_3	30	91	750	68 250	100 000	31 750
d_4	40	78	850	66 300	100 000	33 700
Състояние θ_2						
Решение	Намаление на цените (%)	Нова цена (лв.)	Очаквана реализация на продукцията (бр.)	Очакван реализиран доход (лв.)	Покупна цена на 1250 бр./лв.	Очаквана загуба (лв.)
d_1	10	117	650	76 050	100 000	23 950
d_2	20	104	900	93 600	100 000	6400
d_3	30	91	1000	91 000	100 000	9000
d_4	40	78	1125	87 750	100 000	12 250

Стойностите на функциите на загубите се записват в таблична (матрична) форма:

$L(\theta_j, d_i) =$

θ_j \ d_i	d_1	d_2	d_3	d_4
θ_1	41 500	37 600	31 750	33 700
θ_2	23 950	6400	9000	12 250

При анализ на матрицата на загубите на изходната стратегическа игра $\Gamma = \langle \Omega, D, L \rangle$ се вижда, че стратегията d_3 доминира стратегиите d_1 и d_4 . Премахват се стратегиите d_1 и d_4 (10 % и 40 % намаление на цената) и се получава нова таблица:

$L'(\theta_j, d_i) =$

θ_j \ d_i	d_2	d_3
θ_1	37 600	31 750
θ_2	6400	9000

Играта $\Gamma = \langle \Omega, D', L' \rangle$ се преобразува в статистическа игра $G = \langle \Omega, A, R \rangle$. За целта фирмата провежда статистически експеримент за проучване мнението на клиентите за възможните покупки при намаление на цените. Резултатите от експеримента са стойностите на вектора $X = (x_1, x_2)$, където:

x_1 – ниска оценка на еластичността на търсенето от цената;

x_2 – висока оценка на еластичността на търсенето от цената.

Приема се следното условно разпределение на вероятностите на състоянията на природата θ:

$$P(x_1|\theta_1) = 0,9 \quad P(x_1|\theta_2) = 0,3$$
$$P(x_2|\theta_1) = 0,1 \quad P(x_2|\theta_2) = 0,7.$$

Съставя се множеството A на чистите функции на решение $a(x)$ на статистическата игра. Множеството A се задава с таблицата:

$x \backslash a$	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	d_2	d_2	d_3	d_3
x_2	d_2	d_3	a_2	d_3

Например a_2 означава, че трябва да се избере решение d_2, ако резултатът от експеримента е x_1 и решение d_3, ако резултатът е x_2.

За всяка от тези нерандомизирани (чисти) функции на решение, отчитайки двете състояния на природата θ_1 и θ_2, се изчисляват стойностите на функцията на риска $R(\theta_j, a_k) = \sum_{i=1}^{n} L(\theta_j, d_i).P(x_i|\theta_j)$:

$$R(\theta_1, a_1) = 37\,600.0,9 + 37\,600.0,1 = 37\,600; \quad R(\theta_2, a_1) = 6400.0,3 + 6400.0,7 = 6400;$$
$$R(\theta_1, a_2) = 37\,600.0,9 + 31\,750.0,1 = 37\,015; \quad R(\theta_2, a_2) = 6400.0,3 + 9000.0,7 = 8220;$$
$$R(\theta_1, a_3) = 31\,750.0,9 + 37\,600.0,1 = 32\,335; \quad R(\theta_2, a_3) = 9000.0,3 + 640.0,7 = 7180;$$
$$R(\theta_1, a_4) = 31\,750.0,9 + 31\,750.0,1 = 31\,750; \quad R(\theta_2, a_4) = 9000.0,3 + 900.0,7 = 9000.$$

Получените стойности на функцията на риска $R(\theta, a)$ се записват във вид на таблица:

$R(\theta, a) =$

a	a_1	a_2	a_3	a_4	$\min_j$
θ_1	37 600	37 015	32 335	31 750	31 750*
θ_2	6400	8220	7180	9000	6400
$\max_i$	37600	37015	32335	31750*	

Тъй като статистическата игра G има седлова точка $\left(\max_i \min_j = \min_j \max_i = 31750\right)$, то оптималното решение на фирмата (гарантиращо възможно най-малка загуба) е чистата функция на решение a_4 и тя се определя от $a_4(x_1) = d_3$ и $a_4(x_2) = d_3$.

Оптималната стратегия на фирмата е 30 % намаление на цените на палтата и в двата случая - на ниска и на висока еластичност на търсенето от цената.

Ако играта G няма седлова точка, то минимаксната функция на решение е смесена и може да се намери с помощта на линейното оптимиране.

5. Търсене на минимум

Досега целта бе да намерим оптимално решение според някой от разгледаните критерии, което е свързано с максимален изход. Предстои да разгледаме пример, в който същите критерии ще се модифицират при търсене на оптимално решение, свързано с минимален изход.

Пример 11. Собственик на диамант с пазарна стойност 100 хил. лева трябва да реши дали да го застрахова от кражба. Застрахователна компания му предлага две оферти. При първата оферта собственикът трябва да заплати 20 хил. лева и в случай на кражба получава цялата стойност на диаманта, т.е. всичките 100 хил. лв. При втората оферта собственикът трябва да заплати 10 хил. лева и в случай на кражба получава 50 хил. лева. Да се намери оптималното решение на собственика.

Решение. Собственикът на диаманта разполага със следните три решения: d_1='застрахова диаманта за цялата стойност', d_2='застрахова диаманта за половината му стойност' и d_3='не застрахова диаманта'. Състоянията на природата са: θ_1='диамантът е откраднат' и θ_2='диамантът не е откраднат'. Цената на играта е загубата на собственика и той ще търси решение, което минимизира загубата му. По информацията от условието получаваме таблицата със загубите:

Решения	Състояния на средата	
	θ_1	θ_2
d_1	20	20
d_2	60	10
d_3	100	0

(А) Първо да предположим, че средата е пасивна.

(1) Принцип на доминиращия резултат

Ако ЛВР е краен оптимист, то той ще избере такова решение $d_k \in D$, при което $h^* = H(k,l) = \min_i \min_j H(i,j)$. Следователно ще избере решение d_3, защото $H(3,2) = \min_i \min_j H(i,j) = 0$ и ще се надява диамантът да не бъде откраднат.

Ако ЛВР е краен песимист и смята, че вероятността диамантът да бъде откраднат е много голяма, то той ще застрахова диаманта. Така отпада решение d_3. От крайния песимизъм на ЛВР следва, че според него $P(\theta_1) \approx 1$ и $P(\theta_2) \approx 0$. Попадаме във вероятността среда и критерия за най-вероятното състояние. С цел да минимизира разходите си при състояние на средата θ_1, ЛВР ще избере решение d_1.

(2) Критерий на Уолд

Символично този критерий се записва с израза $h^* = H(k,l) = \min_i \max_j H(i,j)$.

Получаваме таблицата:

Решения	Състояния на средата		$\max_j$
	θ_1	θ_2	
d_1	20	20	20*

d_2	60	10	60
d_3	100	0	100

В тази случай ЛВР ще избере решение d_1. При това решение загубата му ще бъде 20 хил. лева и той ще бъде безразличен дали диамантът ще бъде откраднат. От направените разсъждения тук добре се вижда, че критерия на Уолд може да се нарече и критерий на разумния песимист. За нашата конкретна задача решението на разумния песимист съвпада с решението на крайния песимист.

(3) Критерий на Севидж

В този случай рискът се пресмята по формулата $R(i,j) = H(i,j) - \min_k H(k,j)$.

Така получаваме:

Решения	Състояния на средата	
	θ_1	θ_2
d_1	20	20
d_2	60	10
d_3	100	0
$\min_k$	20	0

Таблицата на риска има вида:

Решения	Състояния на средата		$\max_j$
	θ_1	θ_2	
d_1	0	20	20*
d_2	40	10	40
d_3	80	0	80

Получаваме, че, според критерия на Севидж, оптималното решение е d_1.

(4) Критерий на Хурвиц

За нашата задача този критерий ще има вида $h^* = H(k,l) = \min_i(\lambda \max_j H(i,j) + (1-\lambda)\min_j H(i,j))$. Да решим задачата при две стойности на λ. Нека $a_i = \max_j H(i,j)$, $b_i = \min_j H(i,j)$ и $c_i = \lambda.a_i + (1-\lambda).b_i$.

Първо, нека $\lambda = 0{,}6$, следователно $c_i = 0{,}6a_i + 0{,}4b_i$. Намираме се почти в средата между крайния оптимизъм и разумния песимизъм, но по-близко до разумния песимисъм.

Решения	Състояния на средата				
	θ_1	θ_2	a_i	b_i	c_i
d_1	20	20	20	20	20*
d_2	60	10	60	10	40
d_3	100	0	100	0	60

В този случай ЛВР ще избере решение d_1. Решението съвпада с това на разумния песимист.

Второ, нека $\lambda = 0{,}1$, следователно $c_i = 0{,}1a_i + 0{,}9b_i$. Намираме се много близко до крайния оптимизъм.

Решения	Състояния на средата				
	θ_1	θ_2	a_i	b_i	c_i
d_1	20	20	20	20	20
d_2	60	10	60	10	15
d_3	100	0	100	0	10*

В този случай ЛВР ще избере решение d_3. Решението съвпада с това на крайния оптимизъм.

В горните два случая видяхме влиянието на λ върху взетото решение – в първия случай при $\lambda = 0{,}6$ решението е d_1, а във втория при $\lambda = 0{,}1$ е d_3.

(5) Критерий на Лаплас

Ако работим с таблицата на загубите получаваме

$$m_1 = \frac{1}{2}(20 + 20) = 20\,;$$

$$m_2 = \frac{1}{2}(60 + 10) = 35\,;$$

$$m_3 = \frac{1}{2}(100 + 0) = 50\,.$$

В този случай ЛВР ще избере решението с минимална средна загуба, т.е. решение d_1.

Ако работим с таблицата (матрицата) на риска получаваме

$$m_1 = \frac{1}{2}(0 + 20) = 10\,;$$

$$m_2 = \frac{1}{2}(40 + 10) = 25\,;$$

$$m_3 = \frac{1}{2}(80 + 0) = 40\,.$$

В този случай ЛВР ще избере решението с минимален среден риск, т.е. отново решение d_1.

Получихме, че в двата варианта на този критерий имаме едно и също решение, но това не е задължително.

(Б) Сега нека предположим, че средата е активна. Например собственикът предполага, че на него винаги се случват най-лошите неща и природата активно му противодейства, с цел да увеличи неговите загуби.

За загубите на ЛВР получаваме таблицата:

Решения	Състояния на средата		$\max\limits_j$
	θ_1	θ_2	
d_1	20	20	20*
d_2	60	10	60

d_3	100	0	100
$\min\limits_k$	20*	0	

От горната таблица намираме, че $\max\limits_i \min\limits_j h_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i h_{ij} = 20$. Следователно играта има седлова точка и оптималното решение на ЛВР е d_1.

(В) Накрая нека предположим, че застрахователната компания разполага с данни за кражбите на диаманти, базирайки се на своя опит и информация от полицията. Да предположим, че са известни вероятностите на състоянията на природата $P(\theta_1) = 0{,}1$ и $P(\theta_2) = 0{,}9$.

(1) Критерий на най-вероятното състояние

Най-вероятното състояние е θ_2, следователно най-доброто решение $d_k \in D$ е това, при което $h^*(k) = H(k,2) = \min\limits_i H(i,2)$. Така получаваме, че ЛВР ще избере решение d_3 и $H(3,2) = \min\limits_i \min\limits_j H(i,j) = 0$

(2) Критерий на средната загуба (критерий на Бейс)

Ще намерим математическото очакване на загубата за всяко едно решение:

$E(1) = 20.0{,}1 + 20.0{,}9 = 20$;

$E(2) = 60.0{,}1 + 10.0{,}9 = 15$;

$E(3) = 100.0{,}1 + 0.0{,}9 = 10$.

В този случай ЛВР ще избере решението, носещо най-малката средна загуба, т.е. решение d_3.

6. Изводи от използването на различните критерии

Естествено е да се очаква, че прилагайки различни критерии се получават различни оптимални решения, а изборът на критерий е субективно решение. Следователно ЛВР трябва първо да намери оптималните решения при различните критерии и след това да се прецени в конкретната ситуация кое е най-доброто. Възможни са две ситуации:

(1) Когато при различни критерии се получава едно и също оптимално решение нараства увереността, че това е подходящото решение.

(2) Когато при различни критерии се получават различни оптимални решения, това означава, че много добре трябва да се преосмислят критериите. Понякога се налага и преразглеждане на самата задача за вземане на решение.

Всеки изследовател не трябва да очаква от теорията за вземане на решения окончателното решение, а само съвет кои решения при кои критерии са оптимални.

Литература

1. Дочев, Д. Теория на риска: анализ, измерване и управление на инвестиционния риск. Варна, 1999.
2. Дочев, Д. Теория за вземане на решения. Варна, 2003.
3. Дочев, Д. Теория на риска. Варна, Наука и икономика, 2007.
4. Дочев, Д., Й. Петков. Теория за вземане на решения: ръководство. Варна, Наука и икономика, 2008.
5. Дочев, Д., Й. Петков. Теория за вземане на решения. Варна, Наука и икономика, 2008.

6. Дочев Д., З. Славов. Математико-статистически методи за измерване на инвестиционния риск. Международна научно-практическа конференция “Стратегически насоки в бизнеса през 21. век и качеството на висшето образование”, Варна 03 – 04 юли 2008, с. 356–360.
7. Славов, З. Математически методи и модели в икономиката и управлението. Варна, ВСУ, 2007.
8. Тенекеджиев, К., Н. Николова, Д. Димитракиева. Теория и практика на рисковите решения. МАРС, 2002.
9. Дубров, А., Б. Лагоша, Е. Хрусталев, Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. Москва, Финансы и статистика, 1999.
10. Трояновский, В. Математическое моделирование в менеджменте. Русская Деловая Литература, 1999.
11. Ramsey, F.P. Truth and Probability, in The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays, by F.P. Ramsey. Harcourt Brace, Co, New York, 1931.
12. Savage, L.J. The Foundations of Statistics. Wiley, New York, 1954.
13. Von Newman, J., O. Morgenstern. Theory of Games and Economic Behavior. University Press, New Jersey, 1944.
14. Wald, A. Statistical Decision Functions. Wiley, New York, 1950.