МАТЕМАТИКАТА ПОМАГА НА СПРАВЕДЛИВОСТТА

Доц. д-р Здравко Димитров Славов
Варненски свободен университет „Черноризец Храбър”

Резюме. *В статията се дискутират основните понятия и задачи на теорията за справедливото деление. Последователно се изучават различните принципи за деление, дефинициите на критериите за справедливост и процедурите за деление. Разглеждани са няколко математическите модели на реални задачи за деление.*

Ключови думи: *справедливо деление, теория на игрите, математически модел, полезност, завист.*

MATHEMATICS HELPS FAIRNESS

Zdravko Dimirow Slavov

Abstract. *In this article we discuss the basic concepts and problems of the theory of fair division. We successively study the different principles of division, the definitions of the fairness criteria and the procedures of division. Several mathematical models of real-world problems of division are considered.*

Keywords: *fair division, game theory, mathematical model, utility, envy.*

1. Въведение

Съвременното общество все по-често си задава въпроса за принципите на разпределението на благата в обществото така, че хората да приемат това разпределение за „справедливо”. Един от основните проблеми е в разбирането на понятието „справедливост”. Всеки човек притежава чувството за справедливост, но за различните хора то е различно. Дори нещо повече, за един и същ човек то е различно при различни ситуации. С тези проблеми се е заела теорията за справедливото деление (Fair Division), дял от приложната математика. Това е една сравнително нова теория, но редица идеи в нея са много стари. Причислява се към новите теории, защото добива вида на научна теория във втората половина на XX век. Някои специалисти я разглеждат като един нов дял на теория на игрите, т.е. дял, който се занимава с игри, свързани с деление. Други я определят като нова теория, заимстваща редица понятия и подходи от теорията на игрите.

Основната задача в теорията за справедливото деление е следната: Разполагаме с множество от блага A, което може да се раздели на няколко части по различни начини и група от $n \geq 2$ играча (агенти или индивиди). Те трябва да разделят даденото множество A на n части така, че всеки играч да получи определена част (дял) от общото. Основните въпроси тук са:

(1) Какъв критерий или какви критерии да се използват при това разделяне, така че делението да е справедливо в някакъв смисъл?

(2) Каква да бъде процедурата (алгоритъмът) за делението според избрания критерий или избраните критерии?

Много важен е също така видът на множеството A, т.е. какво се дели. По едни начин стоят нещата, когато това множество е крайно и се състои от еднотипни елементи. По друг начин се решава проблемът, когато множеството от блага е крайно и се състои от разнородни елементи. Понякога множеството A се състои от един елемент, но той е безкрайно делим, например торта. Що се отнася до задачата за деление на земя тя има съвсем друг характер и заслужава специално разглеждане.

От горното става ясно, че тук се решават конкретни житейски проблеми, а не абстрактни и нереални задачи. Следователно теорията за справедливото деление има много голям реален смисъл и нейните резултати са приложими в практиката.

2. Познати принципи на деление

Първо да разгледаме една игра, наречена „Ултиматуми”. Това е една древна икономическа игра, която е по-скоро експеримент за анализ на чувството за справедливост у хората. Ще разгледаме един неин съвременен вариант: Двама играчи разполагат с 10 лв. Първият играч трябва да раздели парите между двамата по свое усмотрение, като всеки от играчите получава някакви пари. Вторият играч трябва да каже дали приема делението или не. Ако приеме делението, то всеки от играчите взема своя дял, а ако не приеме, играчите няма да получат нищо.

Ако разсъждаваме чисто рационално, например от гледна точка на класическата теория на игрите, то вторият играч трябва да приема всяко едно деление на първия играч, защото все нещо получава. На практика нещата не стоят така. Изследователите, които са наблюдавали този експеримент, са установявали много случаи, при които вторият играч отказва офертата за деление на първия играч. Явно в тези случаи „чувството за справедливост” на втория играч надделява над рационалността, т.е. емоционалността надделява над рационалността.

В горната игра ние виждаме един принцип на деление между двама души, а именно: „Аз деля, ти приемаш или отказваш”. Сега да си припомним друг известен принцип на деление: „Аз деля, ти избираш”. И двата принципа се базират на „чувството за справедливост” на играчите. Ако в играта „Ултиматуми” се премахне принципът „Аз деля, ти приемаш или отказваш” и се приложи другият принцип „Аз деля, ти избираш”, навярно винаги първият играч ще дели по 5 лв. за всеки играч. Тогава рационалността и за двамата играчи щеше да има надмощие. В своя оригинален вид играта „Ултиматуми” съдържа емоционален елемент и решенията не са чисто рационални, а представляват една своеобразна борба между рационалност и емоционалност и точно тук се намесва чувството за справедливост [3].

Анализирайки механизма за вземане на решения, авторът често си задава следния въпрос: „Може ли да съществува рационалност без емоционалност и обратно?” Колкото повече авторът се задълбочава в теорията за вземане на решения и теорията за справедливото решение, толкова повече клони към извода, че при вземането на решения хората съчетават рационалността и емоционалността. В някои случаи рационалността надделява, а в други – емоционалността, но почти винаги присъстват и двете. Много рядко определени решения можем да класифицираме като чисто рационални или чисто емоционални.

Обобщавайки, можем да кажем, че вече разгледахме играта „Ултиматуми” и принципа на деление „Аз деля, ти приемаш или отказваш” в нея. Също така споменахме и другия принцип при деление между двама играчи, а именно „Аз деля, ти избираш”, в който забелязвам един много силен елемент на рационалност и справедливост. Естествено трябва да отбележим, че и двата принципа се базират на „чувството за справедливост” на играчите, които представляват интерес за нашите разглеждания.

Сега да разгледаме една елементарна задача за деление на хомогенни блага между двама играча и да анализираме справедливостта при делението.

(A) Задача: Нека множеството A се състои от $2k \geq 2$ еднотипни блага (например еднакви тетрадки) и нека имаме двама играча. Трябва да се разделят тетрадките между играчите.

(Б) Критерий за справедливост: Много хора (навярно почти всички) биха определили, че справедливото деление е на два дяла, като всеки дял има по k от тези блага, т.е. k на брой тетрадки. По друг начин казано, за играчите ще е безразлично кой дял ще получат или ще смятат, че техният дял е по-предпочитаният. Да приемем, че това е справедливото деление на множеството A.

Последователно да разгледаме двата споменати принципа за деление при горната задача.

(1) Първо да разгледаме принципа „Аз деля, ти приемаш или отказваш". Видяхме, че в реалните експерименти на играта „Ултиматуми" играчът, който дели, често не дели на две равни части. Ние приехме, че за нашата задача справедливостта изисква всеки играч да получи по k на брой тетрадки. Видяхме, че понякога първият играч нарушава принципа за справедливост, т.е. постъпва несправедливо. Тази несправедливост той я приема за нещо естествено, защото е в негова полза. При такова деление вторият играч някой път приема (т.е. приема несправедливостта), но някой път отказва да я приеме (т.е. противопоставя се на несправедливостта). Следователно, когато първият играч не раздели справедливо, имаме два момента: (i) първият играч приема несправедливостта, защото е облагодетелстван от нея; (ii) вторият играч понякога приема несправедливостта, а понякога не. Точно тези проблеми заслужават сериозен психологическа анализ.

(2) Сега да разгледаме втория принцип, т.е. принципа „Аз деля, ти избираш". Тук здравият разум изисква първият играч да дели поравно (всеки играч да получи по k на брой тетрадки), т.е. за него двете части да бъдат безразлични. Тук нещата са ясни и недвусмислени, а именно първият играч е задължен да постъпи справедливо, според избрания от нас критерий. Що се

отнася до втория играч, той е в по-добра позиция, защото може да избира, т.е. за него делението ще е справедливо или ще бъде облагодетелстван. Явно този принцип на деление е много по-добър, но естествено се появява един въпрос „Кой ще дели и кой ще избира?”. В нашия анализ установихме, че вторият играч е в по-добра позиция. Следователно всеки играч би желал да бъди избиращият. Един от начините за решаване на този проблем можем да намерим в случайния избор.

Тук естествено се появява още една задача, която е свързана с обобщаване на принципа „Аз деля, ти избираш” за повече от двама играча, т.е. един дели, а останалите избират. Вероятността за конфликт между избиращите играчи е голяма и трябва да се намери начин за неговото преодоляване.

3. Търсене на критерии за справедливост

Да разгледаме няколко примера, с цел да анализираме и дефинираме възможните критерии за „справедливо” деление.

Пример 1. Деление на пари

Сумата от 100 лв. трябва да се раздели между 4 човека. Здравият разум ни дава веднага справедливото деление, а то е по 25 лв. на човек. В този случай всеки човек получава сума, равна на $\frac{1}{4}$ от общата сума. Едно такова деление се нарича пропорционално.

Горната задача може да бъде усложнена, ако има предварително зададени тегла. Например сумата от 120 лв. трябва да се раздели между трима души в отношение 1:2:3, т.е. имаме различни тегла. Общият брой на дяловете (теглата) е 1+2+3=6. Следователно първият ще получи $\frac{1}{6}$ от общата сума или 20 лв., вторият – $\frac{2}{6}$ от общата сума или 40 лв., а третият – $\frac{3}{6}$ от общата сума или 60 лв. Получените суми от 20, 40 и 60 лв. са в отношение 1:2:3, а сумата им е точно 120 лв. Това деление е пропорционално по предварително зададени тегла. □

Пример 2. Делението на тортата

Група деца са поканени на рождения ден на свое другарче. Разбира се, има и торта. Един родител разрязва тортата на равностойни според него парчета и ги раздава на децата. Тук възниква въпросът дали децата смятат, че някое друго дете не е получило по-предпочитано парче от тортата. Ако едно дете смята, че парчето на друго дете е по-предпочитано от неговото, то това дете ще смята, че делението на тортата не е справедливо и то е ощетено. Тук имаме завист.

Въз основа на горните разсъждения ще въведем следната дефиниция: Едно деление на тортата се нарича свободно от завист тогава и само тогава, когато няма дете, което да предпочита повече парчето на друго дете пред неговото.

Сега да насочим нашите разсъждения в друга посока, а именно всяко дете да гледа само своето парче и да не гледа парчетата на другите деца. Нека децата са 12 и тортата да е разделена на 12 парчета. В този случай справедливостта изисква парчето, което е получило дадено дете, да бъде не по-малко от $1/12$ от цялата торта, според представите на това дете. Това трябва да се отнася за всички деца. Следователно всяко дете трябва да смята, че неговото парче е $\geq \frac{1}{12}$ от цялата торта. □

Забележете, че в този пример въведохме два критерия за справедливост – първия, когато всеки играч сравнява своя дял с дяловете на другите, а втория, когато всеки играч сравнява своя дял с полагащата му се част от цялото. В първия случай имаме деление, свободно от завист, а във втория – пропорционално деление.

Пример 3. Добив на природни ресурси

За нуждите на строителството трябва да се добиват пясък и чакъл. Това са природни ресурси, които представляват държавна собственост. Нека съответният държавен орган е определил, че за строителния бизнес годишно са необходими 12 единици пясък и 15 единици чакъл. Пред този орган кандидатстват 4 търговски дружества, които желаят да получат правото да добиват тези два природни ресурса. Да означим с (x_i, y_i) съответните количества за пясък x_i и чакъл y_i за четирите дружества, т.е. имаме $i \in \{1,2,3,4\}$. Естествено получаваме математическия модел:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 12 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 15 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0 \end{array} \right. .$$

Ясно е, че горната система има безброй много решения. Да означим с $\Omega = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\}$ множеството на всички възможни решения на горния модел, т.е. всички възможни деления за възможния добив между търговските дружества.

Да допуснем, че всяко търговско дружество иска да получи по-голям дял за добив на двата природни ресурса. Естествено е също така да очакваме, че някои от търговските дружества ще желаят повече добива на пясък, а други – на чакъл.

Да разгледаме две възможни деления от Ω, а именно $A\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ и $B\{(2,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$. Казваме, че деление B доминира (превъзхожда) деление A, защото при деление B първото търговско дружество е в по-желано състояние, без да се влоши състоянията на останалите.

След тези бележки сме в състояние да въведем критерия на Парето, а имено едно деление от Ω се нарича оптимално по Парето тогава и само тогава, когато не съществува друго деление, което да го доминира. □

За нашия пример е ясно, че трябва да се търси деление, оптимално по Парето. В този случай ще имаме едно оптимално деление, което не може да се подобри. Математически може да се докаже, че в този случай тези оптимални деления са безброй много. Следователно по друг критерий трябва да се избере „справедливо” деление сред деленията, оптимални по Парето, а не от всички деления Ω, т.е. удачно е критерият на Парето да се комбинира с друг критерий.

Пример 4. Разпределение на мандати

Пет партии се явяват на парламентарни избори и печелят съответно 10 %, 20 %, 20 %, 25 % и 25 % от гласовете на избирателите. Общият брой на мандатите е 120. Възниква въпросът, как да се разпределят мандатите между партиите. Естествено е да приемем за справедливо съответно мандатите да са 12, 24, 24, 30 и 30, защото 10 % от 120 е 12, 20 % от 120 е 24 и 25 % от 120 е 30. В този случай виждаме, че задачата има просто и смислено решение.

Проблемът става много труден, когато партиите печелят съответно 10,38 %, 10,48 %, 17,57 %, 29,09 % и 32,48 %. Правейки пресмятания, аналогични на горните, получаваме следните мандати: 12,456; 12,576; 21,084; 34,908 и 38,976.

Тук се сблъскваме с първия проблем при разпределението на мандатите, а той е, че получаваме не цели числа, а броят на мандатите на всяка партия трябва да бъде цяло число. Решаваме да вземем само цялата част на получените по-горе не цели брой мандати. По този начин съответно мандатите са: 12, 12, 21, 34 и 38, като общият брой на разпределените мандати е 117. Губят се три мандата от дробната част. Следователно не сме разпределили мандатите по партии.

Отказваме се от горното решение и се насочваме към сродно друго решение, а то е да закръглим получените резултати по правилата на закръгляне. В този случай получаваме съответно: 12, 13, 21, 35 и 39. За радост сега получаваме сума 120. Смятаме, че сме решили проблема, но това е измамно по следните причини:

(1) Горното правило за закръгляне е чисто математическо и е съмнително да е свързано с чувството за справедливост у хората. То създава определени удобства при някои пресмятания.

(2) Малко е вероятно при решаване на реални проблеми с правилото за закръгляне да разпределим точно мандатите.

С цел да демонстрираме втората причина, да променим много малко входните данни, а именно нека получените резултати са: 10,48 %, 10,48 %, 17,57 %, 29,09 % и 32,38% (промяната е много малка само в първата и петата партия). Правейки пресмятания, аналогични на горните, получаваме следните мандати: 12,576; 12,576; 21,084; 34,908 и 38,856. Закръгляме и получаваме цели числа мандати: 13, 13, 21, 35 и 39. Тяхната сума за съжаление е 121, т.е. разпределихме повече мандати, отколкото имаме. □

В горния пример виждаме, че задачата за справедливо разпределение на мандатите при пропорционална избирателна система е трудна и няма бързо и лесно решение. Има разработени много методи за разпределение на мандатите [2] [6]. Трябва дебело да подчертаем, че при тези методи няма ясно дефиниран критерий за справедливост, следователно всички те имат някаква несправедливост. Аналогично стои въпросът и кой от тях е най-добрият. Верният отговор е, че няма такъв. Фактът, че се използват различни методи за разпределение на мандатите в различни държави, показва, че този въпрос се решава по различен начин в отделните държави и няма универсално решение [1].

При търсене на интересни проблеми, свързани с теорията за справедливото деление, съществуват и някои забавни задачи. Една такава задача е случката с тримата рибари.

Пример 5. Случката с тримата рибари

Трима рибари отишли за риба през нощта. За съжаление уловът не бил много успешен и те решили малко да поспят. Единият от тях се събудил, решил да не буди останалите, а да подели уловената риба на три и да вземе своя дял. Започнал да дели на три равни части, но една риба останала. Той не знаел на кого да я даде и затова я хвърлил във водата. Взел своя дял и си заминал. След известно време се събудил друг рибар. Той не разбрал, че един от тях си е заминал и решил да подели уловената риба на три равни части, да вземе своя дял и да се прибере у дома. Започнал да дели, но една риба останала. Чудейки се какво да прави с нея, той я хвърлил във водата и си тръгнал. Същото се потретило с последния рибар. Той също хвърлил една риба във водата, защото не знаел какво да прави с нея, взел своя дял и се прибрал.

На другия ден тримата приятели се видели и всеки разказал какво е направил. За голямо тяхно учудване се оказало, че всеки от тях е взел равен дял от уловените риби, т.е. уловената риба е била справедливо разпределена. В тази невероятна история си задаваме следните два въпроса: „Колко риби са уловили общо рибарите?” и „Колко риби е получил всеки от тях?”.

Да означим с x броя на уловените риби. Първият рибар установил, че числото x не се дели на три, но числото $x-1$ се дели на 3. Така той взел $\frac{1}{3}(x-1)$ на брой риби и оставил $\frac{2}{3}(x-1)$. Вторият рибар установил, че числото $\frac{2}{3}(x-1)$ не се дели на 3, но числото $\frac{2}{3}(x-1)-1$ се дели на 3. В резултат той взел $\frac{1}{3}(\frac{2}{3}(x-1)-1)$ риби и оставил на брега $\frac{2}{3}(\frac{2}{3}(x-1)-1)$. Накрая третият рибар установил, че числото $\frac{2}{3}(\frac{2}{3}(x-1)-1)$ не се дели на 3, но числото $\frac{2}{3}(\frac{2}{3}(x-1)-1)-1$ се дели на 3. Получаваме, че третият рибар е взел $\frac{1}{3}(\frac{2}{3}(\frac{2}{3}(x-1)-1)-1)$ на брой риби. Окончателно имаме, че първият рибар е взел $\frac{1}{3}(x-1)$ риби, вторият – $\frac{1}{3}(\frac{2}{3}(x-1)-1)$ риби, а третият – $\frac{1}{3}(\frac{2}{3}(\frac{2}{3}(x-1)-1)-1)$ риби. Получаваме уравненията:

$$\frac{1}{3}(x-1)=\frac{1}{3}(\frac{2}{3}(x-1)-1)=\frac{1}{3}(\frac{2}{3}(\frac{2}{3}(x-1)-1)-1).$$

Това са две уравнения с едно неизвестно. Ще решим първото уравнение и ще проверим дали намереното решение удовлетворява второто уравнение. Следователно трябва да решим уравнението:

$$\frac{1}{3}(x-1)=\frac{1}{3}(\frac{2}{3}(x-1)-1).$$

Лесно намираме, че решението е $x=-2$. Това решение удовлетворява и второто уравнение, следователно намерихме решението на нашата задача. Това решение е математически точно, но няма реален смисъл, от което следва, че задачата няма смислено реално решение. □

Чрез горния пример видяхме една забавна задача без реален смисъл. В приложната математика винаги се поставя въпросът: „Това, което получихме като резултат, има ли реален смисъл и може ли да се използва на практика?”. Само при положителен отговор следва, че проблемът в действителност е решен.

4. Формализиран модел

Имаме непразното множество от блага A и група от $n \geq 2$ играчи. Да означим с $(A_1, A_2, ..., A_n)$ едно възможно деление на множеството с блага между играчите, като k-ти играч получава подмножеството $A_k \subset A$. Естествено трябва да са изпълнени следните условия:

(1) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$;

(2) $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i, j \in \{1,2,...,n\}$ и $i \neq j$;

(3) $A_i \neq \varnothing$ за всяко $i \in \{1,2,...,n\}$.

Предполагаме, че всеки играч притежава функция на полезност $u_i : A \to R_+$, $i \in \{1,2,...,n\}$, удовлетворяваща условията:

(1) $u_i(\varnothing) = 0$;

(2) $u_i(A) = \overline{u}_i > 0$.

Сега да преминем към разглеждане на критериите при делението. Да разгледаме делението $(A_1, A_2, ..., A_n)$, което е съставено от подмножества на A, чиито свойства са описани по-горе. Въвеждаме следните дефиниции:

(1) Делението $(A_1, A_2, ..., A_n)$ е пропорционално тогава и само тогава, когато $u_i(A_i) \geq \frac{1}{n}\overline{u}_i$ за всеки играч;

(2) Делението $(A_1, A_2, ..., A_n)$ е свободно от завист тогава и само тогава, когато $u_i(A_i) \geq u_i(A_j)$ за всеки играч и за всяко $j \in \{1,2,...,n\}$;

(3) Делението $(A_1, A_2, ..., A_n)$ е оптимално по Парето тогава и само тогава, когато не съществува друго деление $(P_1, P_2, ..., P_n)$ такова, че $u_i(P_i) \geq u_i(A_i)$ за всяко $i \in \{1,2,...,n\}$ и $u_j(P_j) > u_j(A_j)$ за някое $j \in \{1,2,...,n\}$.

Лесно се съобразява, че всяко деление, което е свободно от завист е също така и пропорционално. Обратното твърдение в общия случай не е вярно, но при $n = 2$ обратното твърдение е вярно.

Да се върнем към процедурата за деление „Аз деля, ти избираш" при $n = 2$. От казаното дотук става ясно, че тази процедура ни осигурява пропорционално и свободно от завист деление [4].

Сега да разгледаме случая при $n = 3$. Ще опишем процедура, която осигурява пропорционално деление, прилагайки принципа „Аз деля, ти избираш". Самото описанието на алгоритъма е:

(1) Избира се случайна наредба на играчите и им се поставят номера 1, 2 и 3;

(2) Играч 1 дели на три части така, че $u_1(A_1) = \frac{1}{3}\overline{u}_1$, $u_1(A_2) = \frac{1}{3}\overline{u}_1$ и $u_1(A_3) = \frac{1}{3}\overline{u}_1$, т.е. на три равни части според него;

(3) Играч 2 определя своите виждания за горното деление. Ако има поне две части с полезност $\geq \frac{1}{3}\overline{u}_2$, то последователността на избор за играчите е 3, 2, 1. Полученото деление е пропорционално. В противен случай преминаваме към следващата стъпка в алгоритъма.

(4) Играч 3 определя своите виждания за горното деление. Ако има

поне две части с полезност $\geq \frac{1}{3}\bar{u}_3$, то последователността на избор за играчите е 2, 3, 1. Полученото деление е пропорционално. В противен случай преминаваме към следващата стъпка в алгоритъма.

(5) Играч 2 има две части с полезност $< \frac{1}{3}\bar{u}_2$ и една част с полезност $> \frac{1}{3}\bar{u}_2$. Играч 3 има две части с полезност $< \frac{1}{3}\bar{u}_3$ и една част с полезност $> \frac{1}{3}\bar{u}_3$. Следователно имаме една част, за която е в сила $< \frac{1}{3}\bar{u}_2$ и $< \frac{1}{3}\bar{u}_3$. Тази част се дава на играч 1. Ясно е, че за обединението на останалите две части имаме $> \frac{2}{3}\bar{u}_2$ и $> \frac{2}{3}\bar{u}_3$. Играчите 2 и 3 прилагат процедурата за обединението на двете останали части. Естествено полученото деление ще бъде пропорционално.

Забележете, че описаното по-горе деление е пропорционално, но не е ясно дали е свободно от завист и дали е оптимално по Парето.

5. За теория на игрите и икономическото поведение

Исторически за първи път се споменава за търсене на решение на проблем, близък до теория на игрите, в едно писмо на английския математик Джеймс Уолдеграв (James Waldegrave) през 1713 г. В него се формулира игрови модел на игра на карти за двама души, известна под името Le Het. Независимо че много идеи на тази теория са формулирани преди 1944 г., за старт на тази теория се приема знаменитият труд на Джон фон Нойман и Оскар Моргенщерн „Теория на игрите и икономическото поведение”, първо издание през 1944 г. [8]. Тук са изложени основните идеи на тази нова теория, а по-късно тези идеи са допълвани и доразвивани.

Естествено често теорията на игрите се свързва с моделирането и анализирането на различни конфликтни ситуации в икономиката, военното дело, политиката и др. Това е причината с нея да се занимават математици, икономисти, психолози, политолози, военни специалисти, прависти и други различни специалисти, свързани по някакъв начин с анализирането на взаимоотношенията между хората. В заключение можем да кажем, че теорията на игрите е наука, изучаваща различни конфликтни ситуации и определяща рационалното поведение на играчите в конфликти.

Да разгледаме една икономическа система с определен брой участници. Това са различни производствени и търговски фирми, банки, потребители и др. Те ще представляват играчите. Интересите на играчите могат да съвпадат изцяло или частично, както и да бъдат противоположни изцяло или частично. Възможните действия от страна на играчите са определени от законите, наредбите и правилниците. Следователно тази икономическа система представлява една игра и може да бъде изследвана от гледна точка на теорията на игрите. Ако правилата на играта са адекватни на реалните правила на икономическата система, то редица теоретични изводи на теорията на игрите могат да се приложат за икономическата система. Ако правилата на играта не са адекватни на реалните правила, то изводите на теорията на игрите ще останат само в сферата на една абстрактна теория и няма да намерят никакво реално приложение. Следователно внимателното изучаване на теорията на игрите и адекватните на реалността игрови модели в много случаи е полезно и може да даде добри резултати, които да се използват в икономическия анализ.

6. Индивидуални предпочитания и функция на полезност

Теорията на полезността е изключително важна за икономиката и теорията на игрите, а в по-общ план – в социалните и стопанските науки. Това важи както в теоретичен, така и в практически аспект. Последователно ще разгледаме две концепции за полезност.

6.1. Непрекъсната функция на полезност

Всеки играч потребител трябва да избира между различни набори (или алтернативи) от блага. Изборът на даден набор му носи определена степен на удовлетворение. Логично е да считаме, че играчът винаги може да сравни два набора от блага и да прецени кой от тях е по-желан. Следователно играчът притежава отношение (или релация) на предпочитание $\succeq$ (не строго) и когато имаме $x(x_1, x_2, ..., x_n) \succeq y(y_1, y_2, ..., y_n)$, то това означава, че играчът предпочита x пред y или е безразличен към тях. Когато имаме едновременно $x \succeq y$ и $y \succeq x$, означава, че играчът е безразличен към двата набора от блага и се означава с $x \cong y$. Строгото предпочитание се дефинира по следния начин: $x \succ y$ тогава и само тогава, когато $x \succeq y$ и не е в сила $x \cong y$.

Обикновено за благата се прави допълнителното предположението, че те са безкрайно делими. Например играчът може да сравнява всякакви количества сирене или плодов сок.

Предполага се, че отношението на предпочитание на играча притежава следните свойства:

(1) Всеки два различни набора от блага x и y могат да бъдат сравнени, т.е. имаме $x \succeq y$ или $y \succeq x$ (това свойство се нарича пълнота);

(2) Всеки набор е сравним със себе си, т.е. $x \succeq x$ (това свойство се нарича рефлексивност);

(3) За всеки три набора с блага имаме транзитивност, т.е. ако $x \succeq y$ и $y \succeq z$, то $x \succeq z$ (това свойство се нарича транзитивност);

(4) Множествата от блага $\{x \mid x \succeq z\}$ и $\{y \mid z \succeq y\}$ са затворени за всеки набор от блага z (това свойство се нарича непрекъснатост).

Строго математически се доказва, че ако са изпълнени горните четири условия за отношението на предпочитание на играча, то съществува непрекъсната функция $u: A \to R$ със следното свойство: $x \succeq y$ тогава и само тогава, когато $u(x) \geq u(y)$. Тази функция се нарича функция на полезност. Чрез тази функция на всеки потребителски набор от блага x се съпоставя едно число, наречено полезност.

Лесно се съобразява, че ако g е строго растяща непрекъсната функция и u е непрекъсната функция на полезност, то $g \circ u$ също е непрекъсната функция на полезност.

6.2. Дискретна функция на полезност

Да разгледаме задачата, при която един играч трябва да избере една от няколко (краен брой) алтернативи. Нека означим множеството от алтернативи с $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ при $m = |A| > 1$ и да предположим, че играчът може да сравнява алтернативи, т.е. да може да определи коя от две дадени алтернативи предпочита. Следователно играчът притежава отношение (релация) на предпочитание $\succeq$ (не строга) над A. Ще повторим, че когато имаме едновременно $x \succeq y$ и $y \succeq x$, означава, че двете възможности са безразлични и се означава с $x \cong y$, а строгото предпочитание се дефинира по следния начин: $x \succ y$ тогава и само тогава, когато $x \succeq y$ и не е в сила $x \cong y$.

Нека горното отношението на предпочитание $\succeq$ притежава следното свойство: всички алтернативи могат линейно да се наредят така, че всяка алтернатива да се предпочита, сравнена с алтернативите след нея.

Лесно се доказва, че ако е изпълнено горното свойство за отношението на предпочитание $\succeq$ на играча, то съществува функция $u : A \to R$ със следните свойства:

(1) $x \succeq y$ тогава и само тогава, когато $u(x) \geq u(y)$;

(2) $x \succ y$ тогава и само тогава, когато $u(x) > u(y)$.

Да разгледаме следния пример в два варианта:

(1) Поставена е задача на един човек да избере една от три възможни алтернативи. Например трябва да посочи любимия си футболен отбор от три възможни. Следователно имаме множеството от алтернативите $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ и предполагаме, че човекът може да избере една печеливша (най-добра в някакъв смисъл) за него алтернатива от зададените възможни. Ако е избрана алтернатива a_1, то имаме $a_1 \succ a_2$ и $a_1 \succ a_3$. В какво отношение се намират алтернативите a_2 и a_3 няма значение, те са еднакво непечеливши, т.е. те са безразлични. В този случай функцията на полезност може да има вида: $u(a_1) = 2$, $u(a_2) = 0$ и $u(a_3) = 0$. Разбира се, има и много други функции на полезност. Важното е, че имаме $u(a_1) > u(a_2)$ и $u(a_1) > u(a_3)$.

(2) Поставена е задача на един човек да подреди по предпочитание три алтернативи. Например трябва да подреди по предпочитание три футболни отбора. Ако човекът разкрие своите предпочитания и те са

$a_1 \succ a_2 \succ a_3$, то за функцията на полезност трябва да е в сила зависимостта $u(a_1) > u(a_2) > u(a_3)$. В този случай функцията на полезност може да има вида: $u(a_1) = 2$, $u(a_2) = 1$ и $u(a_3) = 0$.

Можем да направим обобщение, че в първия вариант имаме $a_1 \succ a_2 \cong a_3$, а във втория – $a_1 \succ a_2 \succ a_3$. Оттук можем да генерираме една идея за дефиниране на дискретна функция на полезност по следния начин: $u(a_i)$ е броят на алтернативите a_k, за които е в сила $a_i \succ a_k$. Горните две функции на полезност са получени точно по този начин.

Също така лесно се забелязва, че ако g е строго растяща функция и u е дискретна функция на полезност, то $g \circ u$ също е дискретна функция на полезност.

7. Справедливото деление в икономиката

Един от въпросите за справедливото деление на благата сред членовете на обществото се свързва с цените на благата. Ако човечеството не бе измислило парите и цените, то проблемите в реалната икономика щяха да бъдат огромни. Благодарение на феномена „пари” и оттам на цените на благата съществува съвременната икономика. Естествено е да се търси решение на огромния проблем за „справедливите цени” в икономиката. Тук има два основни подхода:

(1) Справедливите цени в пазарната икономика

Приема се, че равновесните цени са справедливите, т.е. цените се определят от търсенето и предлагането на благата.

(2) Справедливите цени в непазарната икономика

В този случай справедливите цени се определят от специален орган, определен от държавата. Чисто икономическите съображения стоят на заден план, а на преден план се поставят някои социални, политически и идеологически цели.

Независимо от начина за определяне на цените, да си припомним, че основната задача пред всеки потребител е: $u(x_1, x_2, ..., x_k) \to \max$ при ограничението $p_1.x_1 + p_2.x_2 + ... + p_k.x_k = m$. Решението на тази задача определя поведението на рационалния потребител.

Трябва да отбележим факта, че във всички страни с пазарна икономика съществуват цени, които не се определят само на базата на търсенето и предлагането, а държавата се намества в тяхното формиране. Например това е валидно за цените на електрическата енергия, газта, топлата и питейната вода, лекарствата и медицинското обслужване.

Забележете, че не само цените се свързват със справедливото деление на благата в обществото. Друг проблем за справедливото деление в обществото е свързан с разпределението на общото богатство сред членовете на обществото и правото на собственост. Отново една задача, с която се занимава теорията за справедливото деление. Търсейки решение на горния проблем, Вилфредо Парето достига до идеята за това, което сега ние наричаме оптималност по Парето, а именно едно разпределение на богатството се нарича оптимално по Парето, когато няма друго разпределение, при което един член на обществото да се облагодетелства за сметка на друг. В математическа форма ние вече дефинирахме този критерий.

Човешките взаимоотношения са много сложни. В резултат на това някои съвременни мислители повдигат въпроса, че може в определени ситуации даден човек да е съгласен да влоши състоянието си при положение, че друг значително подобри своето. Да не забравяме, че човек взема своите решения както рационално така и емоционално. В резултат на казаното дотук критерият за оптималност по Парето може да се модифицира, а именно, че едно разпределение на богатството се нарича оптимално по Парето, когато няма друго разпределение, при което един член на обществото да се облагодетелства за сметка на друг, но се допуска един член на обществото да се облагодетелства за сметка на друг само при съгласие на ощетения.

В заключение можем да кажем, че проблемът за справедливото деление на благата в човешкото общество в своята цялост е много голям и сложен. Съмнително е някога да бъде решен в своята пълнота, но това не означава, че не трябва да се търси някакво компромисно и непълно решение.

8. Деление на земя

Един много важен и сложен проблем в теорията за справедливото деление е свързан с делението на земя. В този случай имаме $A \subset R^2$ и трябва този земен участък да разделим на няколко части, като това деление удовлетворява предварително зададени условия.

8.1. Делението на Берлин

След Втората световна война територията на победена Германия е разделена на окупационни зони. Същото е направено и със столицата на Германия – Берлин. На фиг. 1 се вижда това деление между СССР, САЩ, Великобритания и Франция. Важните условия на това деление са, че територията на всяка от четирите държави победителки трябва да бъде линейно свързана и да граничи с територия вън от града.

Фиг. 1. Разделянето на Берлин

Да разгледаме условието за линейната свързаност за едно подмножество $X \subset A$. Казваме, че множеството X е линейна свързаност тогава и само тогава, когато за всеки две точки $M, N \in X$ съществува непрекъсната функция $f:[0,1] \to X$ такава, че $f(0) = M$, $f(1) = N$ и $f([0,1]) \subset X$. Това означава, че за всеки две точки $M, N \in X$ съществува път от едната точка до другата, а самият път се оказва от графиката на функцията f.

Също така забелязваме, че четирите окупирани зони граничат най-малко с още две от останалите, а зоните на СССР и Великобритания граничат с всички останали. Интерес представлява задачата дали съществува такова деление на града, при което всяка от зоните да граничи с всички останали, като се запазят условията за линейна свързаност и граница с територия вън от града. Тук трябва да отбележим, че граница само от една точка между две зони няма реален смисъл на граница. Някой ще каже, че това е една безсмислена задача. Тогава нека се опита да направи такова деление. Да си представим, че политиците, които съставят мирния договор след войната, записват някакви условия в него и след това те трябва да се реализират на практика. Възможно е да не съществува реално решение. Реалността показва, че е съмнително политиците да са много интелигентни и пишейки договори и закони да ги правят перфектни.

Друга естествена задача, която може да се постави и тя има реален смисъл, е общата дължина на границата да бъде минимална. Това би направило отделните зони по-лесни за управление.

8.2. Делението на гора и идеята за атом

Тук предполагаме, че множеството A представлява гора и тя трябва да се раздели между $n \geq 2$ играчи. На практика тази гора може да се раздели между играчите по много възможни начини. Ще използваме понятието σ-алгебра, дефинирана върху A, която представлява съвкупност от подмножества на A, т.е. подмножества, които може да участват в делението и в реалното деление ще участват някои от тези подмножества. Да означим с Ω нашата σ-алгебра. Изпълнени са следните свойства:

(1) $\emptyset \in \Omega$ и $A \in \Omega$;

(2) Ако $B \in \Omega$, то $A \setminus B \in \Omega$;

(3) Ако $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Omega$.

Сега ще въведем понятието „мярка”, дефинирана върху множеството Ω. Чрез нея ще измерваме полезността на всяко подмножество на A от Ω. Това е функцията $\mu : \Omega \to R_+$, която удовлетворява условията:

(1) $\mu(B) \geq 0$ за всяко $B \in \Omega$;

(2) $\mu(\emptyset) = 0$;

(3) Ако $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Omega$ и $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Често се въвеждат и следните допълнителни условия:

(4) Липса атом. Това означава, че за всяко $B \in \Omega$, ако $\mu(B) > 0$, то съществува $C \in \Omega$ такова, че $C \subset B$, $C \neq B$ и $0 < \mu(C) < \mu(B)$.

Трябва по-подробно да разгледаме понятието „атом". Естествено е в гората да има извор. Той представлява една допълнителна екстра и всеки играч би желал да притежава този извор, т.е. той да бъде на негова територия. Следователно територията в непосредствена близост до извора притежава голяма полезност. От друга страна, водата в извора е природен ресурс и е държавна собственост. Много често държавата определя територията около извора за неделима и тя трябва да бъде само на един собственик. Следователно тя трябва да бъде в частта на един от играчите. Да означим с B тази неделима територия непосредствено до извора. В този случай B е атом и той много затруднява делението на гората.

Нека в гората има няколко извора, т.е. имаме няколко атома. Тези атоми могат да имат равна полезност, но е възможно полезността на всеки отделен атом да бъде уникална. Това може да облекчи делението, а може и да го затрудни.

Изобщо наличието на атоми прави всяка задача за деление уникална.

(5) Вероятността мярка. Това означава, че $\mu(A) = 1$.

Горното условие създава много удобства и затова често се поставя. Ако не се постави, разсъжденията често се затрудняват, но не влияе съществено на крайния резултат.

Прието е при модели, свързани с делението на земя, всеки играч да притежава мярка μ_i, $i \in \{1,2,...,n\}$ и тя да удовлетворява условията 1–5. Тогава задачата за деление на земя изглежда така: Да се намери такова деление $(A_1, A_2, ..., A_n)$ между играчите, което изпълнява условията:

$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$; $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i, j \in \{1,2,...,n\}$ и $i \neq j$; $\mu_i(A_i) > 0$ при $i \in \{1,2,...,n\}$.

Заслужава внимание фактът, че за всеки играч са в сила следните зависимости:

(1) за всеки реален земен участък $B \subset A$ е изпълнено условието $\mu_i(B) > 0$;

(2) за всяка конкретна точка $a \in A$ имаме $\mu_i(a) = 0$.

Сега да преминем към разглеждане на критериите за справедливост при делението. Да разгледаме делението $(A_1, A_2, ..., A_n)$, което е съставено от елементи на Ω. Въвеждаме следните дефиниции:

(1) Делението $(A_1, A_2, ..., A_n)$ е пропорционално тогава и само тогава, когато $\mu_i(A_i) \geq \frac{1}{n}$ за всеки играч;

(2) Делението $(A_1, A_2, ..., A_n)$ е строго пропорционално тогава и само тогава, когато $\mu_i(A_i) > \frac{1}{n}$ за всеки играч;

(3) Делението $(A_1, A_2, ..., A_n)$ е свободно от завист тогава и само тогава, когато $\mu_i(A_i) \geq \mu_i(A_j)$ за всеки играч и за всяко $j \in \{1,2,...,n\}$;

(4) Делението $(A_1, A_2, ..., A_n)$ е строго свободно от завист тогава и само тогава, когато $\mu_i(A_i) > \mu_i(A_j)$ за всеки играч и за всяко $j \in \{1,2,...,n\}$;

(5) Делението $(A_1, A_2, ..., A_n)$ е супер свободно от завист тогава и само тогава, когато $\mu_i(A_i) > \frac{1}{n}$ и $\mu_i(A_j) < \frac{1}{n}$ за всеки играч и за всяко $j \neq i$;

(6) Делението $(A_1, A_2, ..., A_n)$ е оптимално по Парето тогава и само тогава, когато не съществува друго деление $(P_1, P_2, ..., P_n)$ такова, че

$\mu_i(P_i) \geq \mu_i(A_i)$ за всяко $i \in \{1,2,...,n\}$ и $\mu_j(P_j) > \mu_j(A_j)$ за някое $j \in \{1,2,...,n\}$.

За дадено деление от горните дефиниции следва, че:

(1) от супер свободно от завист следва строго свободно от завист;

(2) от строго свободно от завист следва свободно от завист;

(3) от строго свободно от завист следва строго пропорционално;

(4) от свободно от завист следва пропорционално;

(5) от строго пропорционално следва пропорционално.

Строго математически се доказва следният интересен резултат: Ако $\{p_i\}_{i=1}^n \subset R_+$ и $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, то съществува деление $(A_1, A_2, ..., A_n)$ такова, че $\mu_i(A_j) = p_i$ за всички $i, j \in \{1,2,...,n\}$ [4]. При $p_i = \frac{1}{n}$, $i \in \{1,2,...,n\}$ следва, че съществува деление, при което всички дялове за всички играчи са с полезност $\frac{1}{n}$. Оттук пък следва, че съществува пропорционално деление.

Специален интерес представлява случаят при $n = 2$. Доказват се следните твърдения [4]:

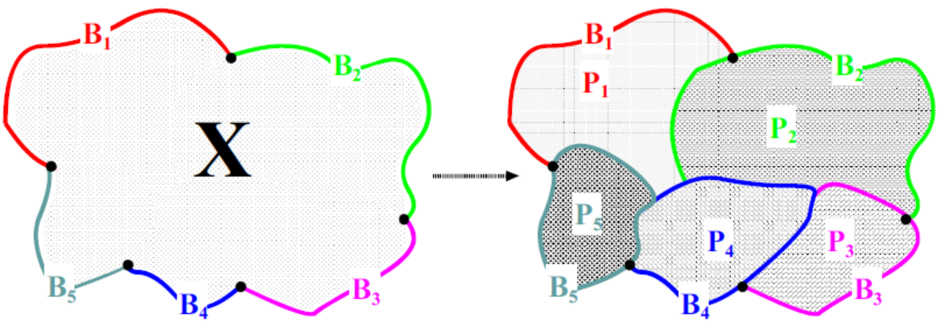
(1) Делението (A_1, A_2) е пропорционално ($\mu_1(A_1) \geq \frac{1}{2}$ и $\mu_2(A_2) \geq \frac{1}{2}$) $\Leftrightarrow$ Делението (A_1, A_2) е свободно от завист ($\mu_1(A_1) \geq \mu_1(A_2)$ и $\mu_2(A_2) \geq \mu_2(A_1)$);

(1) Делението (A_1, A_2) е строго пропорционално ($\mu_1(A_1) > \frac{1}{2}$ и $\mu_2(A_2) > \frac{1}{2}$) $\Leftrightarrow$ Делението (A_1, A_2) е строго свободно от завист $\mu_1(A_1) > \mu_1(A_2)$ и $\mu_2(A_2) > \mu_2(A_1)$ $\Leftrightarrow$ Делението (A_1, A_2) е супер свободно от завист ($\mu_1(A_1) > \frac{1}{n}$, $\mu_1(A_2) < \frac{1}{n}$, $\mu_2(A_2) > \frac{1}{n}$ и $\mu_2(A_1) < \frac{1}{n}$).

8.3. Делението на остров

Характерното за тази задача е, че се дели както територията на острова, така и бреговата ивица едновременно. В този модел с X означаваме територията на острова, а с ∂X неговата брегова ивица. Естествено както територията на целия остров X, така и бреговата му ивица ∂X са свързани множества. Имаме $n \geq 2$ играчи и сме направили вече деление на бреговата ивица по някакъв начин, т.е. разделили сме бреговата ивица на n свързани части $B_1, B_2, ..., B_n$, за които е в сила, че $\partial X = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ и $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

При горните условия се доказва строго математически (Теорема на Hill-Beck, отделни части на която са доказани през 1983 и 1987 г. [5] [7]), че съществува пропорционално деление $(P_1, P_2, ..., P_n)$ на територията на острова, така че всеки дял P_i да е свързан и $B_i \subset P_i$ за всяко $i \in \{1,2,...,n\}$, т.е. всеки дял от делението има своя предварително определена брегова ивица. На фиг. 2 е показано едно такова деление при $n = 5$.



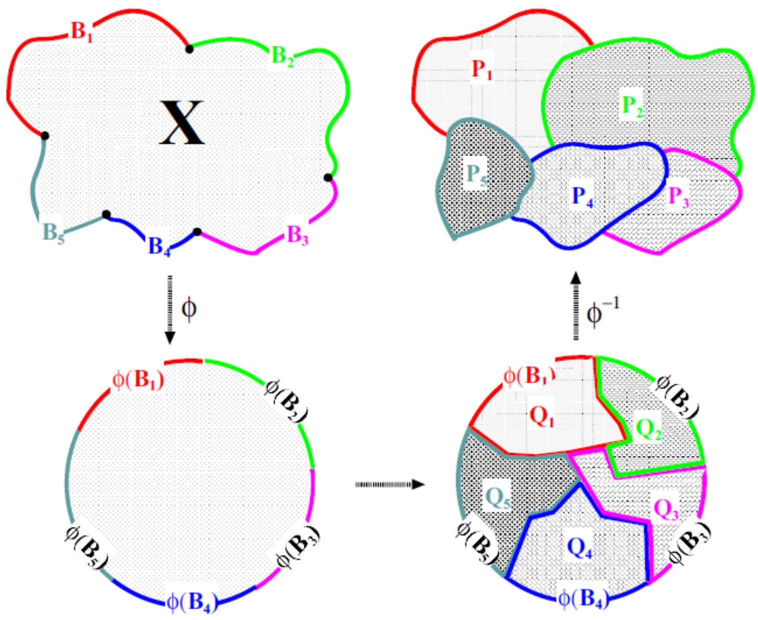
Фиг. 2. Едновременно деление на територията и бреговата ивица

Трябва да изясним понятието „свързаност” на едно множество X. Да разгледаме функцията $f : X \to \{1,2\}$, т.е. тази функция на всяка точка от X

присвоява стойност 1 или 2. Казваме, че множеството X е свързано тогава и само тогава, когато ако f е непрекъсната функция, то тя е константна, т.е. $f(x)=1$ за всяко $x \in X$ или $f(x)=2$ за всяко $x \in X$. По друг начин казано, точките от X са по някакъв начин непрекъснато свързани една с друга и не може някоя от тях да се отдели.

Известно е, че от линейната свързаност следва свързаност. Обратното невинаги е вярно. Например за множеството X (което се явява подмножество на R^2) обратното твърдение не в сила, но за множеството ∂X (което може да се разглежда като подмножество на R) обратното твърдение е в сила.

От математическа гледна точка формата на острова не е съществена. Това ни дава правото задачата за деление на острова да я сведем до деление на единичен кръг. На фиг. 3 е показано нагледно това.



Фиг. 3. Към задачата за деление на единичния кръг

Тук трябва да припомним, че както при задачата за делението на гората, както и при задачата за делението на острова, всеки играч притежава мярка μ_i, $i \in \{1,2,...,n\}$ и тези мерки удовлетворяват условия 1–5.

Литература

1. Славов З., Д. Дочев, Й. Петков. Математически методи за разпределение на мандатите при пропорционалните избирателни системи. e-Journal VFU (2) 2009, 1–12.
2. Славов З. Пропорционалното представителство на пропорционалните избирателни системи. Научен алманах на ВСУ (8) 2011, 118–132.
3. Славов, З. Рационалност, емоционалност и случайност при вземането на решения, Известие на Съюза на учените – Варна (1) 2011, 140–145.
4. Barbanel, J. The Geometry Efficient Fair Division. Cambridge University Press, 2005.
5. Beck, A. Constructing a fair border. American Mathematical Monthly 94 (2) 1987, 157–162.
6. Eck, L., S. Visagie, H. de Kock. Fairness of seat allocation methods in proportional representation. ORiOn, vol. 21, 2005, 93-110.
7. Hill, T. Determining a fair border. American Mathematical Monthly 90 (7) 1983, 438-442.
8. Von Newman, J., O. Morgenstern. Theory of Game and Economic Behavior. Princeton University Press, 1953. (First publication in 1944)